

---

# Geometrisch und physikalisch nichtlineare Mehrskalenmodellierung räumlicher Stabtragwerke

---

Vom Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

von

**Dipl.-Ing. Simon Cornelius Klarmann**  
aus Neuenbürg (Baden-Württemberg)

Erstreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. F. Gruttmann

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

Tag der Einreichung: 30.04.2018

Tag der mündlichen Prüfung: 29.06.2018


Darmstadt 2018

D 17

Klarmann, Simon Cornelius: Geometrisch und physikalisch nichtlineare Mehrskalenmodellierung räumlicher Stabtragwerke  
Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUpriints: 2018

Tag der mündlichen Prüfung: 29.06.2018

Veröffentlicht unter:  CC BY-NC-ND 4.0 International  
<https://creativecommons.org/licenses/>

# Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Forschungstätigkeit am Fachgebiet Festkörpermechanik der TU Darmstadt. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle bei meinem Betreuer Prof. Dr.-Ing. Friedrich Gruttmann für seine Unterstützung, die konstruktiven Diskussionen sowie dem mir überlassenen Freiraum, um mich über die Arbeit hinaus in vielen Bereichen weiterzubilden. Weiterhin möchte ich mich bei meinem Korreferenten Prof. Dr.-Ing. Werner Wagner für die Übernahme des Korreferats sowie die vielen interessanten Diskussionen über das gemeinsam verwendete Finite-Element-Programm FEAP bedanken.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen Arbeitskollegen und -kolleginnen für den fachlichen Austausch und die schöne gemeinsame Zeit bedanken. Besonderer Dank gilt Dominik Heller, Grischa Maaß, Tanja Hanisch und Gregor Knust sowie unserer Sekretärin Angelika Prießnigg, die immer ein offenes Ohr hatte und bei organisatorischen Fragestellungen unersetzlich war.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern und meinem Bruder bedanken, die mich auf meinem Weg begleitet und unterstützt haben. Ohne sie wäre ich nicht so weit gekommen und die Arbeit wäre nie entstanden.

Darmstadt, 2018

Simon Cornelius Klarmann



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Motivation . . . . .	5
1.2 Stand der Forschung . . . . .	6
1.3 Gliederung der Arbeit . . . . .	9
<b>2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>11</b>
2.1 Kinematik . . . . .	11
2.2 Spannungen . . . . .	15
2.3 Erhaltungssätze . . . . .	16
2.3.1 Massenerhaltung . . . . .	16
2.3.2 Impuls- und Drehimpulserhaltung . . . . .	17
2.3.3 Energieerhaltung . . . . .	18
2.4 Materialgleichungen . . . . .	19
2.4.1 Hyperelastisches Materialverhalten . . . . .	19
2.4.2 Elastoplastisches Materialverhalten . . . . .	21
2.5 Schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	22
<b>3 Balkentheorie schubweicher Stabtragwerke</b>	<b>27</b>
3.1 Kinematik . . . . .	27
3.2 Schwache Form des Gleichgewichts und Definition der Balkenschnitt- größen . . . . .	31
3.3 Linearisierung und Bezug zum Materialgesetz . . . . .	32
<b>4 Grundlagen der Homogenisierung</b>	<b>37</b>
4.1 Das repräsentative Volumenelement (RVE) . . . . .	38
4.2 Hill-Mandel-Bedingung . . . . .	41

<b>5</b>	<b>Rand- und Nebenbedingungen des RVEs für Stabtragwerke</b>	<b>45</b>
5.1	Ausgangsbasis der Randbedingungen . . . . .	45
5.2	Erfüllung der Hill-Mandel-Bedingung . . . . .	47
5.2.1	Verschiebungsrandbedingungen . . . . .	49
5.2.2	Periodische Randbedingungen . . . . .	50
5.3	Problemstellung: Schubdeformationen des RVEs . . . . .	51
5.3.1	Starrkörperrotationen infolge periodischer Randbedingungen	51
5.3.2	Gleichgewicht und mittlere Schubdeformationen . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Finite-Elemente-Formulierungen</b>	<b>55</b>
6.1	Balkenelement . . . . .	56
6.2	Volumenelement . . . . .	60
6.3	Interfaceelement – konstante Spannungen . . . . .	61
6.4	Reduziertes Interface – konstante Verzerrungen . . . . .	69
6.5	Nebenbedingung – Lineares Moment . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Numerische Umsetzung des gekoppelten Mehrskalenmodells</b>	<b>77</b>
7.1	Betrachtung des lokalen Modells . . . . .	78
7.2	Anwendungsfall Substrukturmodellierung . . . . .	80
7.3	Anwendungsfall Homogenisierung . . . . .	82
7.3.1	Beziehung zwischen Verschiebungen und Verzerrungen . . .	83
7.3.2	Übertragung der Verzerrungen auf das RVE . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>87</b>
8.1	Rechteckquerschnitt . . . . .	90
8.1.1	Effektive Querschnittswerte – Lineare Elastizität . . . . .	91
8.1.2	Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität – Plastizität	97
8.2	U-Profil . . . . .	104
8.2.1	Effektive Querschnittswerte – Lineare Elastizität . . . . .	104
8.2.2	Biegedrillknicken eines zentrisch gedrückten Kragarms . . .	107
8.3	Geschichteter Querschnitt . . . . .	111
8.3.1	Effektive Querschnittswerte – Lineare Elastizität . . . . .	111
8.3.2	Verhalten bei Plastizieren der Deckschichten . . . . .	115
8.4	Geschwächter Balken . . . . .	118
8.4.1	Winkel unter Einzellast . . . . .	118
8.4.2	Berechnungszeiten . . . . .	123
8.5	Substrukturtechnik – Durchschlagsproblem Rahmenecke . . . . .	128

<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>133</b>
<b>10 Anhang</b>	<b>137</b>
10.1 Finite Rotationen – Rodrigues-Formel . . . . .	137
10.2 Ansatzfunktionen . . . . .	142
10.3 Isoparametrisches Konzept und numerische Integration . . . . .	144
<b>Nomenklatur</b>	<b>149</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>155</b>





# Kurzfassung

Balkenelemente bieten im Rahmen der Finite-Elemente-Methode eine sehr effiziente Möglichkeit große Strukturen abzubilden. Die maßgebliche Schwierigkeit liegt in der Ermittlung der zugehörigen materiellen und geometrischen Eigenschaften, welche das Tragverhalten charakterisieren. Während dies bei der reinen Querschnittsbetrachtung im linear elastischen Fall bereits ausgiebig behandelt wurde, ist die Berücksichtigung physikalischer sowie geometrischer Nichtlinearitäten bis heute Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten. Vor allem die Erweiterung von der reinen Querschnittsbetrachtung auf diejenigen von dreidimensionalen strukturellen Abschnitten vergrößert das Anwendungsgebiet von Balkenelementen immens. Hierzu wird in dieser Arbeit ein Mehrskalenmodell auf Basis einer Homogenisierungstheorie vorgestellt. Dies ermöglicht beliebige Strukturen im Rahmen der Balkentheorie unter Berücksichtigung von geometrischen sowie physikalischen Nichtlinearitäten zu berechnen, welche eine Vorzugsrichtung besitzen. Die Theorie geht dabei über die herkömmliche Kinematik hinaus. Dadurch müssen die Bernoulli-Hypothesen vom Ebenbleiben und der Formtreue der Querschnitte nicht mehr vorausgesetzt werden, sodass Querschnittsdeformationen in der Querschnittsebene berücksichtigt werden. Zudem können Inhomogenitäten in Längsrichtung der Struktur berücksichtigt werden.



# Abstract

Beam elements offer a very efficient way of representing large structures using the finite element method. The main difficulty lies in the determination of the associated material and geometric properties that characterize the load-bearing behavior. While this has already been dealt with extensively in the pure cross-sectional analysis in the linear elastic case, the consideration of physical and geometric nonlinearities is still the subject of current research work. Above all, the extension from the pure cross-sectional view to those of three-dimensional structural sections greatly expands the field of application of beam elements. For this purpose, this work presents a multi-scale model based on a homogenization theory. This allows any structures in beam theory to be calculated considering geometric and physical nonlinearities that have a preferred direction. The theory goes beyond conventional kinematics. This means that the Bernoulli hypotheses of plane and shape conformity of the cross-sections no longer have to be taken into account, so that cross-sectional deformations in the cross-sectional plane are also taken into account. In addition, inhomogeneities in the longitudinal direction of the structure can be considered.



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Balkentheorie gehört zum Grundwerkzeug eines jeden Ingenieurs. Essentiell hierbei ist die Reduktion zu berechnender Strukturen auf eindimensionale Probleme. Dies ermöglicht eine einfache und effiziente Beurteilung ihres Tragverhaltens. Die dabei auftretende Schwierigkeit liegt im Wesentlichen in der Ermittlung der benötigten Querschnittswerte. Bei der Balkentheorie beinhalten diese sowohl geometrische als auch materielle Eigenschaften. Die Querschnittswerte sind bei einer Vielzahl von Querschnitten bekannt, sofern linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird. Wird jedoch die lineare Elastizität verlassen oder die zu beurteilende Struktur zu groß, werden numerische Methoden wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) erforderlich. Im Rahmen dieser Methode ermöglicht die Balkentheorie die Entwicklung von Elementen, welche sehr große Tragstrukturen mit sehr geringem numerischem Aufwand abbilden können.

Für die Entwicklung der numerischen Berechnungsverfahren ist es zudem wichtig, die technische Seite zu berücksichtigen. Hierbei ist festzustellen, dass die Leistung eines einzelnen Rechenkerns in den letzten Jahren keine signifikante Steigerung aufweist. Im Gegenzug ist allerdings ihre Anzahl pro Prozessor immens gestiegen. Um dieser Entwicklung gerecht zu werden, werden parallele und skalierbare Berechnungsansätze benötigt. Ein über die letzten Jahre entstandenes Verfahren ist die numerische Homogenisierung in Form eines gekoppelten Mehrskalenmodells. Hierbei werden die lokalen Eigenschaften eines übergeordneten, makroskopischen Modells durch die Auswertung eines zweiten, feiner auflösenden, mikroskopischen

Modells bestimmt. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Homogenisierung die erforderlichen Querschnittseigenschaften liefert, ist es sinnvoll von einem mesoskopischen Modell zu sprechen. Dieses muss dabei nur repräsentativ für die abzubildende Struktur sein. Somit können seine Dimensionen wesentlich kleiner sein als diejenigen des Tragsystems. Da es sich hierbei um die Ermittlung von lokalen Eigenschaften handelt, sind die resultierenden Gleichungssysteme in ihrer Struktur entkoppelt und können somit parallel gelöst werden. Genauer gesagt entstehen durch dieses Vorgehen mehrere unabhängig voneinander lösbare Finite-Elemente-Modelle, deren Zustand nur vom makroskopischen Modell abhängt. Die Kommunikation zwischen den beiden Skalen beschränkt sich dabei auf die Verzerrungen, die Spannungen sowie deren Linearisierung und stellt somit nur eine geringe Datenmenge dar.

Die zuvor getroffenen Aussagen motivieren das gekoppelte Mehrskalenmodell für räumliche Stabtragwerke weiterzuentwickeln. Dabei bildet ein übergeordnetes Balkenmodell die Gesamtstruktur ab. Für dieses Modell geht die numerische Effizienz im Hinblick auf die Lösung des Gleichungssystems nicht verloren. Die benötigten Querschnittseigenschaften werden jedoch über zusätzliche Volumenmodelle durch Homogenisierung ermittelt. Dabei entsteht eine im Element lokale, nichtlineare Kopplung. Ein großes Gleichungssystem, welches bei der Modellierung mit Volumenelementen entstehen würde, wird hierdurch in viele kleinere, parallel lösbare Gleichungssysteme zerlegt. Zudem führt das Verfahren dazu, dass die Gesamtanzahl der Gleichungen durch die Homogenisierung gegenüber einem Volumenmodell reduziert wird. Dies ist beispielsweise bei Inhomogenitäten der Fall, da nicht mehr jede einzelne, sondern nur eine repräsentative Menge modelliert werden muss.

## 1.2 Stand der Forschung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der gekoppelten Mehrskalenmodellierung räumlicher Stabtragwerke unter Verwendung des Homogenisierungsansatzes nach Hill [31]. Hierdurch gliedern sich die Grundlagen für die Arbeit in die Balkentheorie, die Homogenisierung sowie bereits bestehende Konzepte, welche Balken- und Homogenisierungstheorie verbinden.

Zunächst wird ein kurzer Überblick über die Balkentheorie im Hinblick auf die FEM gegeben. Die Ausgangsbasis stellen hierbei der schubstarre Euler-Bernoulli-Balken

und der schubweiche Timoshenko-Balken dar. Mit der Einführung der Schubdeformation in [69, 70] verbesserte sich die Approximationsgüte, im Speziellen von Systemen mit gedrunenen Querschnitten deutlich. Allerdings halten die aus der Kinematik resultierenden Schubspannungen die Spannungsrandbedingungen nicht ein. Dies führte dazu, dass die Schubdeformation Gegenstand vieler weiterer Publikationen wurde, siehe beispielsweise [48, 56, 67]. Einen ausführlicheren Überblick hierzu findet sich in [62]. Die Autoren beschäftigten sich in diesen Ausführungen in erster Linie mit Wölbfunktionen über die Höhe eines Rechteckquerschnitts. Eine Generalisierung dieses Ansatzes, mit Anwendung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM), wurde in [22, 65] vorgestellt. Der dabei zusätzlich eingeführte Freiheitsgrad für die Verwölbungen ermöglicht es, diese kontinuierlich zu approximieren. Allerdings erfordert dieser Ansatz die Kenntnis der Wölbfunktion. Durch die Beschreibung der Querschnittsdeformation mit Hilfe von Polynomansätzen und zusätzlichen Freiheitsgraden konnte dieses Problem in [5] umgangen werden.

Anstatt die Kinematik zu erweitern, wird die Schubsteifigkeit häufig über separat ermittelte Schubkorrekturfaktoren korrigiert. Diskussionen und Ansätze hierzu finden sich z. B. in [9, 11, 23, 35, 57, 71]. Diese beschränken sich dabei auf homogene Querschnitte. Im Fall inhomogener Querschnitte wurde in [32, 83] ein Verfahren zur Bestimmung aller effektiver Querschnittswerte bei linear elastischem Materialverhalten entwickelt. Eine Erweiterung zur Bestimmung äquivalenter effektiver Querschnittswerte aus einer dreidimensionalen Struktur findet sich in [81]. Dieser Ansatz, basierend auf der asymptotischen Homogenisierung, kommt dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Modell sehr nahe. Allerdings beschränken sich auch diese Ausführungen auf lineare Elastizität. Der in [74, 75] vorgestellte Ansatz ermöglicht eine nichtlineare Kopplung zwischen Balken und Querschnittsmodell. Hierbei besteht aber die Einschränkung auf eine reine Querschnittsabbildung. Dies stellt einen kleinen Überblick über die vorhandenen Arbeiten im Bereich der Balkentheorie und -modellierung dar.

Den zweiten Aspekt der Arbeit bildet die Homogenisierung. In diesem Bereich gibt es für den vollständig dreidimensionalen Fall bereits sehr viele Ansätze. Einen umfassenden Überblick hierzu findet sich beispielsweise in [16, 61]. Die Grundlagen der Homogenisierung reichen dabei weit zurück. Einer der ersten Ansätze lag in der Annahme konstanter Verzerrungen in einem betrachteten Gebiet nach Voigt [73]. Den Gegensatz hierzu bildet die Annahme konstanter Spannungen nach Reuss [58]. Die hierzu äquivalenten nichtlinearen Annahmen sind diejenigen von Taylor [68] und

Sachs [60]. Wichtig zu erwähnen ist, dass diese Annahmen zu einer volumetrischen Wichtung der Eigenschaften führen. Die strukturellen Eigenschaften des zu homogenisierenden Bereichs gehen mit diesen Annahmen verloren. Eine der derzeit am häufigsten verwendeten Homogenisierungsbeziehungen ist diejenige nach Hill [31]. Sie fordert die Verzerrungsenergieäquivalenz zwischen dem zu homogenisierenden Gebiet und den homogenisierten Größen. Hieraus resultieren Einschränkungen der Wahl der Randbedingung, welche an das zu homogenisierende Gebiet gestellt werden. Auf Basis der Irving-Kirkwood-Theorie [39] wurde in [50, 53] ein Verfahren vorgeschlagen, welches diese Restriktionen deutlich abschwächt.

Die gekoppelte, numerische Umsetzung der Homogenisierung, welche auch als  $FE^2$ -Methode [12,13] bekannt ist, wird beispielsweise in [13,54] behandelt. Eine wesentliche Aufgabe besteht darin, die Randbedingungen in das System einzubauen. Ansätze hierzu finden sich in [36,40,51]. Die Anwendung der Methode erfolgte bisher vorrangig auf dreidimensionale Probleme. Im Bereich der Strukturelemente, wie Balken und Schalen, finden sich in erster Linie Arbeiten, die sich mit der Ermittlung effektiver, linear elastischer Materialeigenschaften beschäftigen. Hierzu gehören unter Annahme der Bernoulli-Kinematik die Beiträge [2,4,6,82], [32,42,81,84] behandeln hingegen die Timoshenko-Kinematik. Für Schalenelemente finden sich nicht-linear gekoppelte Verfahren für die Kirchhoff-Love Theorie (schubstarr) in [7]. Interessanter werden die Beiträge bei der Reissner-Mindlin Kinematik (schubweich), da die zusätzliche Schubdeformation ähnliche Probleme wie bei der Timoshenko-Balkenkinematik hervorruft. Die Autoren von [78] gingen, im Rahmen der Schalenkinematik, auf die Erfüllung der Hill-Mandel-Bedingung ein und stellten einen Algorithmus zur gekoppelten Mehrskalenmodellierung von schubweichen Schalen in [24] vor. Dieser Algorithmus stellt die Grundlage der gekoppelten Mehrskalenmodellierung im Rahmen der vorliegenden Arbeit dar. Die in [24] untersuchten Beispiele zeigen, dass das Verfahren, bis auf die Schubdeformation, zu den bekannten Querschnittswerten führt. Hinsichtlich der Schubdeformation wurde dabei allerdings nur eine Netzkonvergenzstudie durchgeführt und der Einfluss der Größe des zu homogenisierenden Modells außer Acht gelassen. Weitere Anwendungsbeispiele des Verfahrens finden sich in [27]. Einen erweiterten Ansatz verfolgten die Autoren von [15]. Diese stellten ein Homogenisierungsverfahren höherer Ordnung vor und wendeten dies ebenso auf die Schalenkinematik an. Untersucht wurden hierbei allerdings sehr komplexe Strukturen. Es wurde nicht gezeigt, dass das Verfahren die bekannten effektiven Eigenschaften beispielsweise homogener Strukturen liefert. Ein weiterer Beitrag [8] hierzu untersuchte genauso nur komplexe Struktu-



ren. In [28, 29] hingegen wurde im Rahmen der Schalenkinematik der Einfluss der Größe des zu homogenisierenden Modells untersucht und eine Abhängigkeit der resultierenden Schubsteifigkeit festgestellt. Zudem wurde ein Schubkorrekturfaktor vorgeschlagen, welcher das Problem reduziert, jedoch nicht vollständig behebt. Die vorliegende Arbeit überträgt das Verfahren aus [24] auf die Timoshenko-Kinematik und liefert einen Ansatz, welcher das Problem der Längenabhängigkeit löst.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die benötigten Grundlagen der Kontinuumsmechanik kurz dargestellt. Dabei beschränken sich die Ausführungen auf die für die Arbeit wesentlichen Inhalte. Im Speziellen wird die Kinematik mit den für die Beschreibung des Deformationszustandes notwendigen Maßen eingeführt. Diese Deformationen werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit durch einwirkende Kräfte hervorgerufen, welche innerhalb des Kontinuums zu Spannungen führen. Weiterhin werden die wesentlichen Erhaltungssätze eingeführt, aus welchen sich die Gleichgewichtsbeziehungen ableiten lassen. Schließlich wird der Zusammenhang zwischen der Deformation des Kontinuums und den Spannungen in Form von Materialgesetzen benötigt. Hierzu werden das linear elastische St. Venant-Kirchhoff sowie das elastoplastische Stoffgesetz nach von Mises vorgestellt. Für die spätere numerische Umsetzung wird abschließend die schwache Form des Gleichgewichts eingeführt.

Die für die Arbeit erforderliche Balkentheorie wird in Kapitel 3 vorgestellt. Der hierbei wesentliche Teil umfasst die kinematischen Annahmen. Mit ihrer Hilfe und der zuvor eingeführten schwachen Form des Gleichgewichts werden weiterhin die Definitionen der Schnittgrößen sowie deren Linearisierung dargelegt.

Kapitel 4 führt die wesentlichen Grundgedanken der Homogenisierung ein. Hierzu gehören die Definition des repräsentativen Volumenelements (RVE) sowie die Mittelungsbeziehungen zwischen der makroskopischen und der mikroskopischen Skala. Abschließend wird die Hill-Mandel-Bedingung vorgestellt, welche die Grundannahme für die Homogenisierung in dieser Arbeit darstellt.

In Kapitel 5 werden zunächst die offensichtlichen Randbedingungen dargelegt und gezeigt, dass diese die Hill-Mandel-Bedingung erfüllen. Es werden neben den Verschiebungsrandbedingungen auch die periodischen Randbedingungen untersucht.

Weiterhin wird auf das wesentliche Problem der Balkenschubdeformation eingegangen und eine mögliche Lösung zur Behebung dargelegt.

In Kapitel 6 werden die verwendeten Finite-Elemente-Formulierungen vorgestellt. Zu den darin hergeleiteten Elementen gehören ein Balkenelement und ein Volumenelement. Weiterhin werden Elemente vorgestellt, welche es ermöglichen, die erforderlichen Rand- und Nebenbedingungen auf das zu berechnende System aufzubringen. Zu ihnen gehört ein Interfacelement, welches es ermöglicht Balkenelemente und Volumenmodelle zu verbinden sowie zwei spezielle Elemente, welche die erforderlichen Nebenbedingungen für die Homogenisierung auf das System aufzwingen.

Die numerische Umsetzung der gekoppelten Mehrskalenberechnung erfolgt in Kapitel 7. Dabei wird der Algorithmus so allgemein wie möglich gehalten. Es wird aufgezeigt, dass sich das gewählte Vorgehen sowohl für die Substrukturmodellierung als auch für die im Fokus der Arbeit stehende Homogenisierung verwenden lässt.

In Kapitel 8 werden die resultierenden Randbedingungen erörtert. Weiterhin wird das Homogenisierungsverfahren an geeigneten Beispielen getestet. Hierzu gehört die Ermittlung effektiver Querschnittswerte homogener Querschnitte als Benchmarkwerte für das Verfahren. Weitere Beispiele beinhalten Inhomogenitäten im Querschnitt sowie in Längsrichtung des Balkens. Zudem wird der Einfluss geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten bei der Homogenisierung untersucht. Abschließende Beispiele legen dar, dass auch die Substrukturmodellierung mit dem vorgestellten Verfahren möglich ist.

Kapitel 9 liefert eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick auf künftige Forschungsthemen.

# Kapitel 2

## Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Dieses Kapitel dient zur Einführung in die Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Diese werden in den folgenden Kapiteln zur Herleitung der Elementformulierungen sowie des Homogenisierungskonzepts benötigt. Die Ausführungen sind dabei auf das Wesentliche beschränkt und der interessierte Leser wird auf Standardwerke wie [1, 33] verwiesen.

### 2.1 Kinematik

In der Kontinuumsmechanik werden physikalische Vorgänge in einem Kontinuum beschrieben. Dieses Kontinuum ist ein Körper  $\mathcal{B}$  bestehend aus materiellen Punkten  $\chi \in \mathcal{B}$  und begrenzt durch seinen Rand  $\partial\mathcal{B}$ , siehe Abb. 2.1.

Zur Beschreibung des Körpers wird der euklidische Raum mit orthonormalem Basissystem  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$  und festem Ursprung  $O$  eingeführt. Der Körper  $\mathcal{B}$  kann jeden beliebigen Bereich dieses Raumes einnehmen. Wird zudem eine streng monoton wachsende Funktion zur Beschreibung der Zeit eingeführt, so besitzt er zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine eindeutige Lage. Diese kann durch die Abbildungen

$$\begin{aligned}\phi_0(\chi, t) : \mathcal{B} &\mapsto \Omega_0 \\ \phi(\chi, t) : \mathcal{B} &\mapsto \Omega_t\end{aligned}\tag{2.1}$$

beschrieben werden. An dieser Stelle werden bewusst zwei Abbildungen eingeführt, da für die Beschreibung einer Veränderung immer eine Vergleichsgröße erforderlich

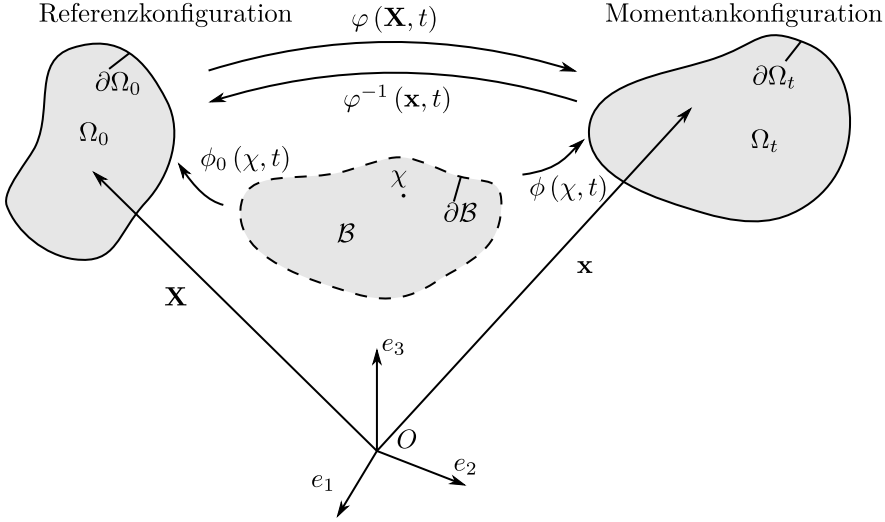


Abbildung 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration.

ist. Dieser Vergleichszustand wird als Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  mit der Abbildung  $\phi_0(\chi, t)$  bezeichnet, wohingegen der aktuelle Zustand durch die Momentankonfiguration  $\Omega_t$  mit Abbildung  $\phi(\chi, t)$  beschrieben wird. Hierdurch ergibt sich die geometrische Lage eines materiellen Punktes zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  durch

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \phi_0(\chi, t) = \phi_0(\chi, t_0) = \phi_0(\chi) \\ \mathbf{x} &= \phi(\chi, t).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Es wird vereinbart, dass die Referenzkonfiguration diejenige ist, in welcher der Körper zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$  das Gebiet  $\Omega_0$  einnimmt. Somit ist diese unabhängig von der Zeit und die Ortsvektoren der materiellen Punkte werden mit  $\mathbf{X}$  bezeichnet. Im Gegensatz dazu wird die Momentankonfiguration  $\Omega_t$  einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  zugeordnet und ist somit explizit von diesem abhängig. Die zugehörigen Ortsvektoren werden dabei mit  $\mathbf{x}$  bezeichnet. Die Eindeutigkeit dieser Abbildung wird sichergestellt, indem jedem materiellen Punkt  $\chi$  zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  genau ein Ortsvektor  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{x}$  zugeordnet ist und sich umgekehrt jeder materielle Punkt auch durch den entsprechenden Ortsvektor identifizieren lässt. Somit ist

$$\mathbf{X} = \phi_0(\chi, t), \quad \chi = \phi_0^{-1}(\mathbf{X}, t)\tag{2.3}$$

$$\mathbf{x} = \phi(\chi, t), \quad \chi = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t).\tag{2.4}$$

Durch die genannte Eindeutigkeit und Umkehrbarkeit der Abbildung lässt sich der Körper über

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{X}, t) : \Omega_0 &\mapsto \Omega_t \\ \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) : \Omega_t &\mapsto \Omega_0\end{aligned}\tag{2.5}$$

auch direkt von der Referenz- in die Momentankonfiguration überführen. Entsprechend der Abbildungen in den euklidischen Raum, muss auch diese Abbildung eindeutig und umkehrbar sein. Dies hat zur Folge, dass sich die Ortsvektoren in der Momentankonfiguration als Funktion der Ortsvektoren in der Referenzkonfiguration und der Zeit  $t$  darstellen lassen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t).\tag{2.6}$$

Die Ausgangsbasis zur Beschreibung der Deformation eines Körpers ist die Überführung eines Linienelements von der Referenzkonfiguration  $d\mathbf{X}$  in die Momentankonfiguration  $d\mathbf{x}$ . Hierzu kann das Linienelement in der Momentankonfiguration mit

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)\tag{2.7}$$

beschrieben werden. Wird nun der Ortsvektor bezüglich der Momentankonfiguration

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}\tag{2.8}$$

als Taylorreihe mit Abbruch nach dem linearen Glied dargestellt und in Gleichung (2.7) eingesetzt, ergibt sich für die Überführung des Linienelements

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \text{Grad}(\mathbf{x}) d\mathbf{X}.\tag{2.9}$$

Die partielle Ableitung wird als Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \neq \mathbf{F}^T\tag{2.10}$$

bezeichnet. Dieser ist im Allgemeinen unsymmetrisch und bei Starrkörperbewegung ungleich Null. Mittels seiner Determinante, der Jacobideterminante

$$J = \det \mathbf{F},\tag{2.11}$$

lassen sich damit auch Flächenelemente

$$d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A} \quad (2.12)$$

sowie Volumenelemente

$$dv = JdV \quad (2.13)$$

von der Referenz- in die Momentankonfiguration überführen.

Zur Überführung des Körpers von der Referenz- in die Momentankonfiguration wird der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.14)$$

definiert. Analog zu  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{x}$  ist auch  $\mathbf{u}$  eindeutig einem materiellen Punkt zugeordnet und hängt entsprechend von der Zeit ab. Einsetzen von Gleichung (2.14) in Gleichung (2.9) ergibt für die Transformation eines Linienelements von der Referenz- in die Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial(\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} d\mathbf{X} = \left( \mathbf{1} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \right) d\mathbf{X}. \quad (2.15)$$

Mittels Gleichung (2.15) wird der Verschiebungsgradient

$$\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (2.16)$$

definiert. Zudem wird der Zusammenhang mit dem Deformationsgradienten ersichtlich.

Um die Beschreibung der Deformation eines Körpers zu vereinfachen, bietet es sich an, diese mittels eines Verzerrungstensors auszudrücken. Hierbei gibt es diverse Möglichkeiten. Die gängigste ist der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ . Dieser ist durch die Änderung der quadrierten Länge eines Linienelementes

$$d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \quad (2.17)$$

definiert. Durch Umformen von Gleichung (2.17) mit Gleichung (2.9) lässt sich  $\mathbf{E}$  darstellen als

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}). \quad (2.18)$$

Einsetzen von Gleichung (2.16) in Gleichung (2.18) liefert den Zusammenhang zwi-

schen dem Verschiebungsgradienten und den Green-Lagrange'schen Verzerrungen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}). \quad (2.19)$$

Sofern die Deformationen klein bleiben und somit  $|\mathbf{H}| \ll 1$  ist, entsprechen die linearisierten Verzerrungen den Green-Lagrange'schen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}). \quad (2.20)$$

## 2.2 Spannungen

Zusätzlich zu den Deformationen eines Körpers interessieren die auf ihn einwirkenden Kräfte, ohne die er sich nicht deformieren würde.

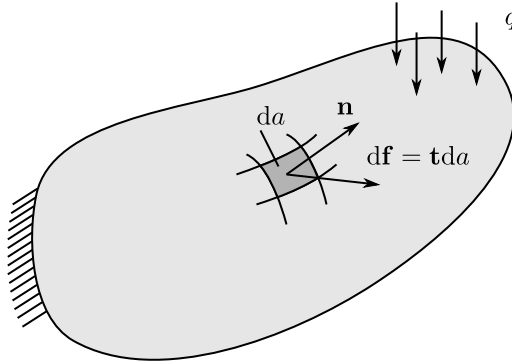


Abbildung 2.2: Belasteter Körper mit Spannungsvektor.

Hierfür lässt sich ein Körper betrachten, auf dessen Oberfläche ein differentieller Kraftvektor  $d\mathbf{f}$  wirkt, siehe Abb. 2.2. Über die Definition eines Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  lässt sich der Zusammenhang

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} da = \mathbf{t}_0 dA \quad (2.21)$$

formulieren. Dieser lässt sich sowohl für die Momentankonfiguration mit  $\mathbf{t}$  und  $da$ , als auch für die Referenzkonfiguration mit  $\mathbf{t}_0$  und  $dA$  schreiben. Dabei ist  $\mathbf{t}$  der Cauchy'sche Spannungstensor und  $\mathbf{t}_0$  der 1. Piola-Kirchhoff'sche Spannungsvektor.

Den Zusammenhang zwischen den auf die Oberfläche wirkenden Spannungsvecto-

ren und den im Körper auftretenden Spannungen liefert das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} da = \underbrace{J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}}_{\mathbf{P}} \mathbf{N} dA = \mathbf{P} \mathbf{N} dA. \quad (2.22)$$

Dabei sind  $\boldsymbol{\sigma}$  die Cauchy'schen Spannungen, bezogen auf die Momentankonfiguration, und  $\mathbf{P}$  die 1. Piola-Kirchhoff'schen Spannungen, welche sich auf die Referenzkonfiguration beziehen. Entsprechend wird die Flächennormale in der Momentankonfiguration als  $\mathbf{n}$  und in der Referenzkonfiguration als  $\mathbf{N}$  bezeichnet.

Über diesen Zusammenhang lassen sich weitere Spannungstensoren formulieren, wobei ein weiterer wichtiger der 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.23)$$

ist. Im Gegensatz zu  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{P}$  kann diesem keine physikalische Bedeutung zugeschrieben werden. Er ist jedoch arbeitskonform zum Green-Lagrange'schen Verzerungstensor  $\mathbf{E}$ . Dies ist essentiell für die spätere Verwendung der schwachen Form des Gleichgewichts nach Abschnitt 2.5.

## 2.3 Erhaltungssätze

Erhaltungssätze spielen eine zentrale Rolle bei der Beschreibung des Zustandes eines Systems, indem sie die zeitliche Änderung einer betrachteten Größe beschreiben. Diese Änderung wird dabei durch Quell- und Senkenterme sowie Zu- und Abflüsse über den Rand des Gebiets beschrieben.

### 2.3.1 Massenerhaltung

Wird ein Körper als abgeschlossenes System betrachtet, d.h. dem Körper werden weder materielle Punkte hinzugefügt noch weggenommen, dann bleibt seine Masse  $m$  konstant und die zeitliche Änderung  $\dot{m}$  ist null. Dies bedeutet, dass weder Bewegungen noch Deformationen eine Änderung seiner Masse bewirken und somit gilt

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \, dV = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \text{const.} \quad (2.24)$$



In Gleichung (2.24) ist  $\rho_0$  die Dichte des Körpers in der Referenzkonfiguration und  $\rho$  diejenige in der Momentankonfiguration.

### 2.3.2 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Die Impulserhaltung drückt aus, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers der Resultierenden aller auf ihn wirkenden Kräfte entspricht. Dies lässt sich darstellen als

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 dA. \quad (2.25)$$

In Gleichung (2.25) sind  $\mathbf{I}$  der Impuls,  $\dot{\mathbf{I}}$  seine zeitliche Änderung,  $\mathbf{v}_0$  die Geschwindigkeit eines materiellen Teilchens,  $\mathbf{b}_0$  die von außen angreifenden Volumenlasten und  $\mathbf{t}_0$  die auf den Körper wirkenden Oberflächenlasten.

Bei Betrachtung des statischen Falles, also  $\mathbf{v}_0 = 0$ , ist  $\dot{\mathbf{I}} = 0$  und Gleichung (2.25) reduziert sich auf das Kräftegleichgewicht

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 dA = 0. \quad (2.26)$$

Einsetzen des Cauchy-Theorems und Anwenden des Divergenztheorems führt auf die bekannte Form des Gleichgewichts

$$\int_{\Omega_0} (\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0) dV = 0, \quad (2.27)$$

oder in lokaler Form

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = 0. \quad (2.28)$$

Analog zur Impulserhaltung lässt sich die Drehimpulserhaltung formulieren

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{v}_0 dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \mathbf{b}_0 dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_0 dA. \quad (2.29)$$

Dabei ist  $\mathbf{L}$  der Drehimpuls,  $\dot{\mathbf{L}}$  seine zeitliche Änderung und  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_0$  der Positionsvektor bezüglich eines Referenzpunktes  $\mathbf{X}_0$ . Die lokale Form im statischen

Fall liefert die Symmetrie der Cauchy Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.30)$$

Damit sind auch die 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungen  $\mathbf{S}$  symmetrisch.

### 2.3.3 Energieerhaltung

Ein weiterer wichtiger Erhaltungssatz ist die Energieerhaltung oder auch erster Hauptsatz der Thermodynamik. Dieser besagt, dass sich die zeitliche Änderung der Energie in einem Körper aus der Summe der Leistung aller auf den Körper wirkenden externen Lasten  $\mathcal{P}_{ext}$  und der Wärmequellen  $\mathcal{Q}$  zusammensetzt. Dies lässt sich über

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \left( \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + e_0 \right) dV = \int_{\Omega_0} (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + r_0) dV + \int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{N}) dA \quad (2.31)$$

beschreiben. Dabei ist  $\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0$  die kinetische Energie und  $e_0$  die innere mechanische Energie, deren zeitliche Änderung über interne Wärmequellen  $r_0$ , den Wärmefluss  $\mathbf{q}_0$  und die Leistung der externen Lasten  $\mathcal{P}_{ext}$  beschrieben wird. Der Vektor  $\mathbf{v}_0$  ist dabei der Geschwindigkeitsvektor bezüglich der Referenzkonfiguration. Mit ihm ergibt sich die Leistung der externen Lasten zu

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v}_0 dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{v}_0 dA. \quad (2.32)$$

Im statischen Fall und unter Vernachlässigung der thermischen Energie entspricht die zeitliche Änderung der internen mechanischen Energie der Spannungsleistung  $\mathcal{P}_{int}$ . Diese lässt sich schreiben als

$$\mathcal{P}_{int} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} e_0 dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV = \mathcal{P}_{ext} \quad (2.33)$$

und ist gleich der Leistung der externen Lasten. Über diese Beziehung lassen sich arbeitskonforme Spannungs-Verzerrungs-Paare ermitteln. Zu ihnen gehören beispielsweise der 1. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor mit dem Deformationsgradienten und der 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor mit den Green-Lagrange'schen Verzerrungen.

## 2.4 Materialgleichungen

In den bisherigen Ausführungen wurden die Kinematik, die Spannungen und die Bilanzgleichungen eingeführt. Die hierbei getroffenen Aussagen sind allgemein und materialunabhängig. Werden jedoch, vereinfacht im statischen Fall, die unabhängigen Größen zusammengezählt, so ergeben sich 9 Unbekannte für den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und 3 unbekannte Verschiebungen  $\mathbf{u}$  im Falle der Kinematik. Diesen stehen 3 Gleichungen aus der Impulserhaltung und 3 aus der Drehimpulserhaltung gegenüber. Zusammengenommen ergibt dies 6 Gleichungen für insgesamt 12 Unbekannte. Die noch fehlenden Gleichungen müssen sich folglich aus den Materialgleichungen ergeben, welche den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungszustand in einem Körper beschreiben.

Das Materialverhalten kann im Allgemeinen in dissipatives und nicht-dissipatives Verhalten unterschieden werden. Letzteres ist dadurch charakterisiert, dass die mechanische Energie im System gespeichert bleibt. Somit sind in diesem Fall die Deformationsprozesse umkehrbar. Darunter fallen z. B. hyperelastische Materialien.

### 2.4.1 Hyperelastisches Materialverhalten

Hyperelastische Materialien sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich über eine Formänderungsenergiedichte  $W_S(\mathbf{X}, \mathbf{F})$  beschreiben lassen. Mit ihr kann der Zusammenhang zwischen dem Deformationsgradienten und dem 1. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor durch

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W_S(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.34)$$

ausgedrückt werden. Diese Aussage gilt sowohl für homogene als auch für inhomogene Materialien. Erstere sind allerdings unabhängig vom Ortsvektor  $\mathbf{X}$ . Damit ist in diesem Fall die Formänderungsenergiedichte nur noch eine Funktion des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ .

Eine wichtige Bedingung, welche von einem Materialgesetz erfüllt werden muss, ist die materielle Objektivität. Dies bedeutet, dass die Formänderungsenergiedichte beobachterunabhängig sein muss. Da der Deformationsgradient selbst unabhängig von Starrkörpertranslationen ist, muss noch die Unabhängigkeit gegenüber Starr-

körperrotationen sichergestellt werden. Diese lassen sich mittels eines orthogonalen Tensors  $\mathbf{R}$  beschreiben. Es muss somit gelten

$$W_S(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = W_S(\mathbf{X}, \mathbf{R}\mathbf{F}). \quad (2.35)$$

Ein geeigneteres Maß zur Beschreibung der Deformation eines Körpers sind die Green-Lagrange'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}$ , welche mit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.36)$$

und der Beziehung von  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}$  invariant gegenüber Starrkörperbewegungen sind. Dies führt zur Relation

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_s(\mathbf{X}, \mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.37)$$

Eine weitere Eigenschaft von  $\mathbf{E}$  ist, dass sich bei einer Starrkörperbewegung  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  ergibt. Damit lassen sich folgende Anforderungen an  $W_S$  stellen

$$\begin{aligned} W_S &= 0, \text{ wenn } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ W_S &> 0, \text{ wenn } \mathbf{E} \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Im Fall isotroper linearer Elastizität resultiert hieraus das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialgesetz mit

$$\mathbf{S} = \underbrace{\frac{\partial^2 W_S}{\partial \mathbf{E}^2}}_{\mathbb{C}} \mathbf{E}. \quad (2.39)$$

Dieses lässt sich durch zwei Materialparameter, dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$ , in Voigt'scher Notation darstellen als

$$\mathbb{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

### 2.4.2 Elastoplastisches Materialverhalten

Als Beispiel für dissipative Materialgesetze wird an dieser Stelle das in der Arbeit verwendete Plastizitätsmodell nach von Mises [55] vorgestellt. Hierbei werden die Grundgedanken im Fall eines linear elastischen, ideal plastischen Verhaltens kurz angesprochen. Für weitere Details zur Plastizitätstheorie und numerischen Umsetzung wird der Leser bspw. auf [49, 64] verwiesen.

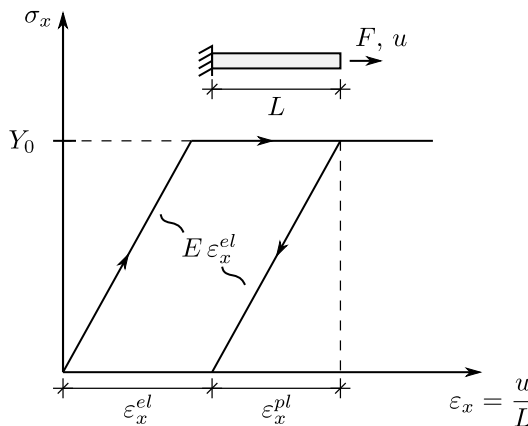


Abbildung 2.3: Verhalten eines Zugstabs bei linear elastischer, ideal plastischer Deformation.

Das grundlegende Verhalten eines linear elastischen, ideal plastischen Materials ist am Beispiel eines Zugstabs in Abb. 2.3 dargestellt. Im Diagramm ist die Normalspannung  $\sigma_x$  über die Dehnung  $\varepsilon_x$  in Längsrichtung des Stabs aufgetragen. Der Stab selbst ist durch eine Last  $F$  belastet und besitzt die Länge  $L$ . Zu beobachten ist ein linearer Zusammenhang  $\sigma_x = E \varepsilon_x^{el}$  zwischen der Spannung  $\sigma_x$  und der Dehnung  $\varepsilon_x^{el}$ , welcher über den Elastizitätsmodul  $E$  ausgedrückt wird. Dieser Zusammenhang besteht, bis die Fließspannung  $Y_0$  erreicht wird. Danach beginnt das Material zu fließen. Das Wesentliche ist der abschließende Entlastungspfad. Dieser besitzt den gleichen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen. Allerdings geht dieser nicht mehr durch den Ursprung, sondern es verbleiben, nach vollständiger Entlastung, plastische Dehnungen  $\varepsilon_x^{pl}$ .

Die genannte Beobachtung kann auf einen vollständigen Verzerrungszustand übertragen werden. Unter der Voraussetzung, dass  $|\mathbf{E}| < 5\%$  ist, lässt sich dies additiv

mit den linearisierten Verzerrungstensoren

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{pl} \quad (2.41)$$

durchführen. Analog zum genannten Zugstab hängen die resultierenden Spannungen  $\mathbf{S}$  vom elastischen Anteil des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}^{el}$  ab. Dies lässt sich über das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialgesetz

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}\mathbf{E}^{el} \quad (2.42)$$

beschreiben. Die Spannungen sind dabei durch die Fließbedingung  $F(\mathbf{S})$  begrenzt. Sofern linear elastisches, ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird, lässt sie sich mit

$$F(\mathbf{S}) = \bar{\phi}(\mathbf{S}) - Y_0 \leq 0, \quad Y_0 : \text{Fließspannung} \quad (2.43)$$

darstellen. Ein Zustand mit  $F > 0$  ist unzulässig, wobei für  $F < 0$  das elastische Stoffgesetz nach Gleichung (2.42) gilt und für  $F = 0$  Plastizität vorliegt. Im letzten Fall nehmen die plastischen Dehnungen  $\mathbf{E}^{pl}$  zu. Dies wird über das Fließgesetz

$$\dot{\mathbf{E}}^{pl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.44)$$

beschrieben.

Im Fall der angenommenen Plastizität nach von Mises lautet die Fließbedingung

$$F(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - Y_0, \quad \text{mit } \mathbf{s} = \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S} \mathbf{1}. \quad (2.45)$$

Sie beschreibt einen Zylinder um die hydrostatische Achse im Hauptspannungsraum.

## 2.5 Schwache Form des Gleichgewichts

Die schwache Form des Gleichgewichts stellt die Ausgangsbasis für die Berechnung eines mechanischen Systems mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) dar. Hierbei

wird die starke Form der Impulsbilanz

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial\Omega_{0\mathbf{u}}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial\Omega_{0\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.48)$$

mit einer zulässigen Testfunktion (virtuellen Verrückung)  $\delta \mathbf{u}$  multipliziert und über das Gebiet  $\Omega_0$  integriert, wobei der Rand des Gebiets in einen Verschiebungsrand  $\partial\Omega_{0\mathbf{u}}$  und einen Spannungsrand  $\partial\Omega_{0\boldsymbol{\sigma}}$  aufgeteilt ist. Die Testfunktion muss dabei die Randbedingungen berücksichtigen, entsprechend ist  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  auf  $\partial\Omega_{0\mathbf{u}}$ . Dies führt schließlich auf

$$- \int_{\Omega_0} (\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0. \quad (2.49)$$

Anhand des Fundamentalsatzes der Variationsformulierung wird sichtbar, dass Gleichung (2.49) für beliebige  $\delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  nur erfüllt sein kann, wenn die Impulsbilanz erfüllt ist.

Die schwache Form des Gleichgewichts ergibt sich schließlich durch Anwendung der Produktregel für den Divergenzoperator

$$\text{Div} (\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}) = \text{Div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{P} : \text{Grad} \delta \mathbf{u}, \quad (2.50)$$

sowie des Gauß'schen Integralsatzes

$$\int_{\Omega_0} \text{Div} (\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}) \, dV = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{P}^T \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} \, dA = \int_{\partial\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA \quad (2.51)$$

zu

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad} \delta \mathbf{u} - \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA. \quad (2.52)$$

Mit  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  und somit  $\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{u}$  gilt außerdem

$$\delta \mathbf{F} = \text{Grad} \delta \mathbf{u}. \quad (2.53)$$

Somit kann die schwache Form des Gleichgewichts auch als

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} - \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA \quad (2.54)$$

geschrieben werden. Weiterhin liefert

$$\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{S} : \delta \mathbf{F} = \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} = \mathbf{S} : \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}) + \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} - \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \right\} \quad (2.55)$$

mit dem Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$  und dessen Variation

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \quad (2.56)$$

die Darstellung in den 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungen

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} &= \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{S} : \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} - \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F})}_{= 0, \text{ wegen } \mathbf{S} = \mathbf{S}^T} = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die schwache Form des Gleichgewichts kann damit, unter Berücksichtigung der Randlasten  $\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}$ , auch geschrieben werden als

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} - \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \Omega_{0\sigma}} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA. \quad (2.58)$$

Aufgrund der Symmetrie von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{S}$  stellt Gleichung (2.58) die bevorzugte Form zur Entwicklung finiter Elemente dar.

Da die direkte Ermittlung des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  in Gleichung (2.54) oder Gleichung (2.58) bei nichtlinearen Problemen nicht möglich ist, werden die Gleichungen mittels iterativer Verfahren gelöst. Eines der bekanntesten und am häufigsten verwendeten Verfahren stellt das Newton-Raphson-Verfahren dar. Hierbei wird eine Taylorreihenentwicklung der schwachen Form mit der aktuellen Lösung  $\mathbf{u}$  gebildet. Der Abbruch dieser Reihe nach dem linearen Glied führt auf das lineare Gleichungssystem

$$L[g(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u})] := g(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u}) + D[g(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.59)$$

Dieses Gleichungssystem wird mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}_n$  zum aktuellen Iterationsschritt  $n$  aufgestellt und anschließend nach  $\Delta \mathbf{u}$  gelöst. Die neuen Verschiebungen zum Schritt  $n+1$  ergeben sich schließlich durch Addition zu  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}$ . Aufstellen des Gleichungssystems mit den neuen Verschiebungen  $\mathbf{u}_{n+1}$ , Auflösen nach  $\Delta \mathbf{u}$  und Aktualisieren der Verschiebungen wird so lange wiederholt, bis  $g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \approx 0$ .

Im Falle konservativer Lasten lässt sich das lineare Glied der Taylorreihe für Gleichung



chung (2.58) darstellen als

$$D[g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}}_{\mathbb{C}} \Delta \mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} \, dV. \quad (2.60)$$

Darin ist  $\delta \mathbf{E} : \mathbb{C} \Delta \mathbf{E}$  der materielle und  $\mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E}$  der geometrische Anteil.



# Kapitel 3

## Balkentheorie schubweicher Stabtragwerke

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen der Balkentheorie kurz dargelegt. Hierzu gehören die kinematischen Annahmen sowie die Definition der Schnittgrößen und ihre Linearisierungen.

### 3.1 Kinematik

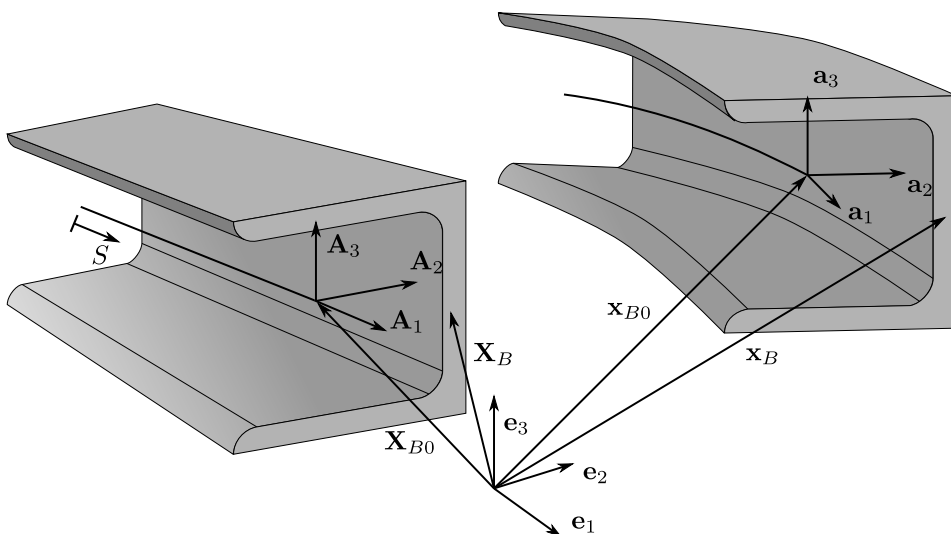


Abbildung 3.1: Balkenkinematik.

In der Balkentheorie wird der Körper über eine Referenzlinie beschrieben, siehe Abb. 3.1. Diese Linie kann beliebig gewählt werden und ihre Position im Raum ist eindeutig durch die Ortsvektoren  $\mathbf{X}_{B0}$  in der Referenzkonfiguration bzw.  $\mathbf{x}_{B0}$  in der Momentankonfiguration gegeben. Für eine vollständige Beschreibung des Körpers wird zudem ein orthonormales Koordinatensystem  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$  eingeführt, wobei der Querschnitt mittels der Achsen  $\mathbf{A}_2$  und  $\mathbf{A}_3$  bestimmt wird. Entsprechend werden diese Achsen als  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  in der Momentankonfiguration bezeichnet. Die Vektoren  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{a}_1$  stehen senkrecht auf dem Querschnitt, entsprechen jedoch nicht unbedingt der Tangente an die Referenzlinie.

Die Darstellung der Koordinatensysteme  $\mathbf{A}_i$  und  $\mathbf{a}_i$  erfolgt mittels Orthogonaltransformation

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_0(S) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{R}(S, t) \mathbf{e}_i \quad \text{mit } \mathbf{R}_0, \mathbf{R} \in SO(3) \text{ und } \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}. \quad (3.1)$$

Somit ergeben sich für die Ortsvektoren in der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{X}_B(S, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{X}_{B0}(S) + \xi_2 \mathbf{A}_2(S) + \xi_3 \mathbf{A}_3(S) \quad (3.2)$$

und entsprechend in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{x}_B(S, \xi_2, \xi_3, t) = \mathbf{x}_{B0}(S, t) + \xi_2 \mathbf{a}_2(S, t) + \xi_3 \mathbf{a}_3(S, t). \quad (3.3)$$

Zur Beschreibung der Deformation des Körpers werden die Tangentenvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{X}'_{B0} + \xi_2 \mathbf{A}'_2 + \xi_3 \mathbf{A}'_3, & \mathbf{g}_1 &= \mathbf{x}'_{B0} + \xi_2 \mathbf{a}'_2 + \xi_3 \mathbf{a}'_3, \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{A}_2, & \mathbf{g}_2 &= \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{A}_3, & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

gebildet. Dabei ist  $\{\bullet\}'$  die Ableitung nach der Bogenlänge  $S$ . Über die Definition

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_1 = (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{X}'_B) \mathbf{e}_i, & \mathbf{f}_1 &= \mathbf{R}^T \mathbf{g}_1 = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}'_B) \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_2 = \mathbf{e}_2, & \mathbf{f}_2 &= \mathbf{R}^T \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_3 = \mathbf{e}_3, & \mathbf{f}_3 &= \mathbf{R}^T \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

lässt sich der Bezug zu den Balkenverzerrungen

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 + 1 \\ \gamma_2^0 \\ \gamma_3^0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} -\kappa_3^0 \\ 0 \\ \kappa_1^0 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} \kappa_2^0 \\ -\kappa_1^0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^t + 1 \\ \gamma_2^t \\ \gamma_3^t \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} -\kappa_3^t \\ 0 \\ \kappa_1^t \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} \kappa_2^t \\ -\kappa_1^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

herstellen. Zusammenfassen der Terme liefert

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix}_0 + \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\varepsilon_0 + \mathbf{e}_1. \quad (3.8)$$

Analog hierzu gilt für die Momentankonfiguration

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix}_t + \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\varepsilon_t + \mathbf{e}_1. \quad (3.9)$$

Dabei beschreiben die Verzerrungen  $\varepsilon_0$  den Verzerrungszustand in der Referenzkonfiguration, welcher sich infolge einer gekrümmten oder verwundenen Geometrie ergibt. Sofern der Balken gerade und unverwunden ist, gilt  $\varepsilon_0 = \mathbf{0}$ . In der Momentankonfiguration ergeben sich hingegen die Verzerrungen  $\varepsilon_t$ .

Die Komponenten der Green-Lagrange'schen Verzerrungen

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \quad (3.10)$$

lassen sich nun über die zuvor definierten Tangentenvektoren, Gleichung (3.4), mittels der Metrikensoren  $G_{ij}$  sowie  $g_{ij}$  darstellen. Diese können mit Hilfe der Defini-

tionen in Gleichung (3.5) durch Orthogonaltransformation der Tangentenvektoren

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_j = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j, \\ g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{g}_j = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j \end{aligned} \quad (3.11)$$

in Zusammenhang mit den Balkenverzerrungen gebracht werden. Ihre nicht verschwindenden Komponenten sind

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} E_{11} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (g_{11} - G_{11}) \\ g_{12} - G_{12} \\ g_{13} - G_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_1) \\ \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_3 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Einsetzen von Gleichungen (3.5), (3.9) und (3.12) in Gleichung (3.12) liefert

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (2\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \cdot \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Werden kleine Verzerrungen und somit  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \approx \mathbf{0}$  angenommen, ergibt sich

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_t - \boldsymbol{\kappa}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Unter der Annahme, dass der Balken in der Referenzkonfiguration mit  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  spannungsfrei ist, sind  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$  die spannungserzeugenden Verzerrungen und Krümmungen des Balkens. Mittels der Gleichungen (3.5) bis (3.7) lassen sich die Balkenverzerrungen auch in folgender Form darstellen

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}'_{B0} - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{X}'_{B0} \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}'_{B0} - \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X}'_{B0} \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{x}'_{B0} - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{X}'_{B0} \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}'_2 - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}'_2 \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_3 - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}'_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}'_1 - \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}'_1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Die Ableitungen der orthonormalen Basissysteme  $\mathbf{A}'_i$  und  $\mathbf{a}'_i$  können mit Hilfe der axialen Vektoren  $\boldsymbol{\theta}_{B0}$  und  $\boldsymbol{\theta}_B$  zu

$$\mathbf{A}'_i = \boldsymbol{\theta}_{B0} \times \mathbf{A}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{a}'_i = \boldsymbol{\theta}_B \times \mathbf{a}_i \quad (3.16)$$

ermittelt werden. Damit ist es möglich die Balkenverzerrungen aus Gleichung (3.15) mit

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{x}'_{B0} - \mathbf{R}_0^T \mathbf{x}'_{B0} \\ \mathbf{R}^T \boldsymbol{\theta}_B - \mathbf{R}_0^T \boldsymbol{\theta}_{B0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

darzustellen. Mit kinematisch zulässigen Testfunktionen  $\delta \mathbf{v} = [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{w}]$  lassen sich gemäß [21] ihre Variationen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^T \mathbf{x}'_{B0} + \mathbf{R}^T \delta \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{R}^T \boldsymbol{\theta}_B + \mathbf{R}^T \delta \boldsymbol{\theta}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{x}'_{B0} - \delta \mathbf{w} \times \mathbf{x}'_{B0}) \\ \mathbf{R}^T \delta \mathbf{w}' \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

aufstellen. Hierbei ist  $\delta \mathbf{w}$  über die Relation  $\delta \mathbf{a}_i = \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{a}_i = \delta \mathbf{w} \times \mathbf{a}_i$  definiert. Für die FE-Implementierung wird die folgende Darstellung bevorzugt

$$\delta \mathbf{E}_B = \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}'_{B0} + \mathbf{a}_1 \cdot \delta \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}'_{B0} + \mathbf{a}_2 \cdot \delta \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{x}'_{B0} + \mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{a}'_2 \\ \delta \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_3 + \mathbf{a}_1 \cdot \delta \mathbf{a}'_3 \\ \delta \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \delta \mathbf{a}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta \bar{\varepsilon} \\ \delta \bar{\kappa} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

## 3.2 Schwache Form des Gleichgewichts und Definition der Balkenschnittgrößen

In einem nächsten Schritt wird die in Abschnitt 3.1 vorgestellte Kinematik in die schwache Form des Gleichgewichts, Gleichung (2.58), eingesetzt. Dies liefert

$$g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \int_A \mathbf{A}^T \mathbf{S}_B \, dA - \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{f}} - \delta \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{m}} \, dS. \quad (3.20)$$

Dabei sind  $\bar{\mathbf{f}}$  Linienlasten und  $\bar{\mathbf{m}}$  Linienmomente, welche an der Balkenreferenzach-

se angreifen. Der Term

$$\int_A \mathbf{A}^T \mathbf{S}_B \, dA = \int_A \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{13}\xi_2 - S^{12}\xi_3 \\ S^{11}\xi_3 \\ -S^{11}\xi_2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \quad (3.21)$$

liefert, mit den nicht verschwindenden Termen der 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungen  $\mathbf{S}_B = [S^{11}, S^{12}, S^{13}]^T$ , die Balkenschnittgrößen  $\boldsymbol{\sigma}$  durch Integration über die Querschnittsfläche  $A$ . Dabei werden die Normalkraft  $N$  sowie die beiden Querkraften  $Q^2, Q^3$  im Vektor  $\mathbf{F} = [N, Q^2, Q^3]^T$  und das Torsionsmoment  $M^1$  sowie die beiden Biegemomente  $M^2, M^3$  im Vektor  $\mathbf{M} = [M^1, M^2, M^3]^T$  angeordnet. Mit  $\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{F}$  und  $\mathbf{m} = \mathbf{R}\mathbf{M}$  lässt sich Gleichung (3.20) durch Einsetzen von Gleichung (3.18) auch schreiben als

$$g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{f} \cdot (\delta\mathbf{x}'_{B0} - \delta\mathbf{w} \times \mathbf{x}'_{B0}) + \mathbf{m} \cdot \delta\mathbf{w}' - \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{f}} - \delta\mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{m}} \, dS. \quad (3.22)$$

Dies führt mit  $\delta\mathbf{x}_{B0} = \delta\mathbf{u}$  durch partielle Integration auf die Form

$$g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = - \int_S (\mathbf{f}' + \bar{\mathbf{f}}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{m}' + \mathbf{x}'_{B0} \times \mathbf{f} + \bar{\mathbf{m}}) \cdot \delta\mathbf{w} \, dS. \quad (3.23)$$

Aus dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung folgt das statische Gleichgewicht zu

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' + \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}' + \mathbf{x}'_{B0} \times \mathbf{f} + \bar{\mathbf{m}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.3 Linearisierung und Bezug zum Materialgesetz

Für den Bezug zum Materialgesetz und die FE-Implementierung wird die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gleichung (3.20) benötigt. Unter der Annahme von konservativen Lasten ist nur die virtuelle innere Arbeit

$$D[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})] \cdot \Delta\mathbf{v} = D \left[ \int_S \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dS \right] \cdot \Delta\mathbf{v} \quad (3.25)$$



zu linearisieren und führt zu

$$D[g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v})] \cdot \Delta \mathbf{v} = \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dS. \quad (3.26)$$

Dabei ergibt sich  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  durch formales Ersetzen von  $\delta$  mit  $\Delta$  aus  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  entsprechend Gleichung (3.19). Die Linearisierung von  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  liefert mit Gleichung (3.19)

$$\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}'_{B0} + \Delta \mathbf{a}_1 \cdot \delta \mathbf{x}'_{B0} + \Delta \delta \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{a}_2 \cdot \Delta \mathbf{x}'_{B0} + \Delta \mathbf{a}_2 \cdot \delta \mathbf{x}'_{B0} + \Delta \delta \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \mathbf{x}'_{B0} + \Delta \mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{x}'_{B0} + \Delta \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{x}'_{B0} \\ \delta \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \mathbf{a}'_2 + \Delta \mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{a}'_2 + \Delta \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_2 \\ \delta \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{a}'_3 + \Delta \mathbf{a}_1 \cdot \delta \mathbf{a}'_3 + \Delta \delta \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_3 + \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_3 \\ \delta \mathbf{a}_2 \cdot \Delta \mathbf{a}'_1 + \Delta \mathbf{a}_2 \cdot \delta \mathbf{a}'_1 + \Delta \delta \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_1 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Mit der Definition der Schnittgrößen in Gleichung (3.21) lässt sich  $\mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  über

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \int_A \mathbf{A}^T \frac{\partial \mathbf{S}_B}{\partial \mathbf{E}_B} \frac{\partial \mathbf{E}_B}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \, dA = \int_A \mathbf{A}^T \mathbb{C} \mathbf{A} \, dA \quad (3.28)$$

bestimmen, wobei hier nur die nicht verschwindenden Terme von  $\mathbf{S}$  berücksichtigt werden. Im linear elastischen Fall ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{12} \\ S^{13} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} E_{11} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

die Materialtangente für den Balken zu

$$\mathbf{D} = \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & E \xi_3 & -E \xi_2 \\ 0 & G & 0 & -G \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & G \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G \xi_3 & G \xi_2 & G(\xi_2^2 + \xi_3^2) & 0 & 0 \\ E \xi_3 & 0 & 0 & 0 & E \xi_3^2 & -E \xi_2 \xi_3 \\ -E \xi_2 & 0 & 0 & 0 & -E \xi_2 \xi_3 & E \xi_2^2 \end{bmatrix} dA. \quad (3.30)$$

Eine Auswertung des Integrals für  $\mathbf{D}$  liefert die bekannten Querschnittswerte

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & EA s_3 & -EA s_2 \\ & GA & 0 & -GA s_3 & 0 & 0 \\ & & GA & GA s_2 & 0 & 0 \\ & & & GI_p & 0 & 0 \\ & sym. & & & EI_2 & EI_{23} \\ & & & & & EI_3 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Dabei sind  $A$  die Querschnittsfläche,  $I_2$  und  $I_3$  die Flächenträgheitsmomente bezogen auf die jeweilige Rotationsachse,  $I_{23}$  das Deviationsmoment,  $I_p = I_2 + I_3$  das polare Flächenträgheitsmoment und  $s_2, s_3$  der Abstand des Schwerpunktes des Querschnitts zur Bezugsachse des Balkens. Die in Gleichung (3.31) angegebenen Querschnittswerte haben einige Einschränkungen bzgl. ihrer Gültigkeit. Hierzu gehören folgende Annahmen:

- Der Querschnitt bleibt eben, d. h. es treten keine Verwölbungen infolge Schub oder Torsion auf.
- Schubmittelpunkt und Schwerpunkt fallen zusammen. Dies geschieht im Allgemeinen nur bei doppelsymmetrischen Querschnitten.
- Es wird ein homogener Querschnitt vorausgesetzt, d. h. der Elastizitätsmodul  $E$  und der Schubmodul  $G$  sind konstant.

Eine deutlich verbesserte Variante kann durch die Mitnahme der Verwölbungen erzielt werden, siehe [74]. Hierdurch entstehen zunächst zusätzliche Schnittgrößen. Durch statische Kondensation dieser Schnittgrößen ergibt sich schließlich

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & EA s_3 & -EA s_2 \\ & GA_{S2} & 0 & -GA_{S2} m_3 & 0 & 0 \\ & & GA_{S3} & GA_{S3} m_2 & 0 & 0 \\ & & & GI_T^* & 0 & 0 \\ & sym. & & & EI_2 & EI_{23} \\ & & & & & EI_3 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Dabei sind  $m_2$  und  $m_3$  der Abstand des Schubmittelpunktes zur Referenzachse.

Das Torsionsträgheitsmoment ergibt sich zu

$$I_T^* = I_T + A_{S2} \cdot m_3^2 + A_{S3} \cdot m_2^2, \quad (3.33)$$

zusammengesetzt aus dem St. Venant'schen Torsionsträgheitsmoment  $I_T$  mit zugehörigen Anteilen der Schubflächen. Im Gegensatz zum polaren Torsionsträgheitsmoment  $I_p$  werden mit  $I_T^*$  die Querschnittsverwölbungen berücksichtigt. Insgesamt liefert Gleichung (3.32) gegenüber Gleichung (3.31) bessere Ergebnisse und wird daher als Benchmark für die aus dem Mehrskalenmodell resultierenden Werte herangezogen.



# Kapitel 4

## Grundlagen der Homogenisierung

Bei der Betrachtung eines hinreichend großen Körpers aus größerer Distanz, erscheint dieser für den Betrachter als homogen. Entsprechend dieser rein optischen Feststellung kann auch sein Verhalten bei Deformation unter der Annahme eines homogenen Materialverhaltens beschrieben werden. Erst bei sehr starker Vergrößerung werden die strukturellen Beschaffenheiten und die damit einhergehenden Inhomogenitäten des Körpers sichtbar. Sofern die Eigenschaften der sichtbar gewordenen Inhomogenitäten bekannt sind, können mit Hilfe eines Homogenisierungsverfahrens äquivalente homogene Eigenschaften ermittelt werden, welche die Eigenschaften des betrachteten Körpers widerspiegeln.

Die Homogenisierung im Rahmen dieser Arbeit ist eine Mittelung einer betrachteten Größe über ein Referenzvolumen. Im Speziellen sind homogenisierte Verzerrungen bekannt, welche in einem Referenzvolumen Spannungen hervorrufen sollen. Aus diesen werden wiederum homogenisierte Spannungen gewonnen. Hierbei stellt sich im Wesentlichen die Frage, wie die bekannten Verzerrungen auf das Referenzvolumen aufzubringen sind. Einer der ersten Ansätze hierfür war die Annahme von konstanten Verzerrungen nach Voigt [73]. Hierauf folgte mit der Annahme von konstanten Spannungen im Gebiet der Homogenisierungsansatz nach Reuss [58]. Beide Verfahren beziehen sich auf lineare Elastizität. Sie berücksichtigen jedoch nicht die geometrische Struktur des Materials. Einen anderen Ansatz liefert die Hill-Mandel-Bedingung [30]. Sie fordert die Äquivalenz der Formänderungsenergie. Das hierbei interessante ist, dass die zuvor genannten Ansätze die obere und untere Grenze für die homogenisierten Steifigkeiten liefern.

## 4.1 Das repräsentative Volumenelement (RVE)

Die Definition des repräsentativen Volumenelements folgt im Wesentlichen den Ausführungen in [19]. Zur Ermittlung effektiver, homogener Materialeigenschaften für einen makroskopisch homogenen Körper, mit bisher unbekannten materiellen Eigenschaften, kann zu deren Ermittlung die Umgebung eines makroskopischen Punktes  $\mathbf{X}^M$  stark vergrößert betrachtet werden, siehe Abb. 4.1.

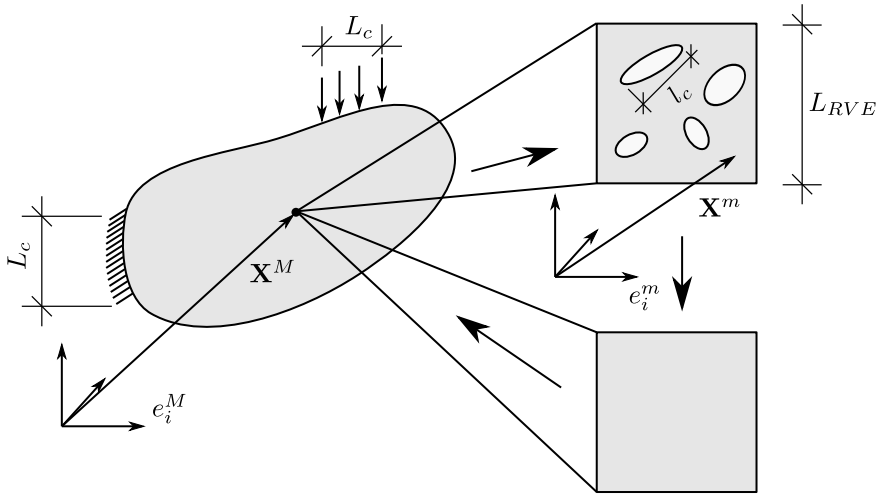


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Konzepts des repräsentativen Volumenelements.

Die herausgeschnittene Umgebung des Punktes  $\mathbf{X}^M$  wird als repräsentatives Volumenelement (RVE) bezeichnet. Das RVE beinhaltet dabei Heterogenitäten und löst diese inklusive ihrer Geometrie auf. Somit stellt es nicht nur die mikroskopischen materiellen, sondern auch strukturellen Eigenschaften des als makroskopisch homogen angesehenen Materials dar. Sind diese Eigenschaften bekannt, so können durch Homogenisierung die makroskopischen Eigenschaften bestimmt werden.

Für die Homogenisierung müssen entsprechend dem Wort *repräsentativ* Bedingungen an das RVE sowie den makroskopischen Körper gestellt werden. Zum einen muss das RVE groß genug sein. Dies bedeutet, dass die Abmessung  $L_{RVE}$  größer sein muss als eine charakteristische Abmessung  $l_c$  einer Heterogenität. Zum anderen müssen die Heterogenitäten hinreichend homogen im betrachteten makroskopischen Bereich verteilt sein. Die charakteristische Länge  $L_c$  dieses Bereichs muss zudem

größer sein als diejenige des RVEs. Somit ergeben sich die Forderungen

$$l_c \ll L_{RVE} \ll L_c. \quad (4.1)$$

Durch die Separierung der Skalen entstehen mehrere Randwertprobleme. Zum einen das makroskopische

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{P}^M + \rho \mathbf{b}_0^M &= 0 && \text{in } \Omega_0^M, \\ \mathbf{t}_0^M &= \bar{\mathbf{t}}_0^M && \text{auf } \partial\Omega_{0\sigma}^M, \\ \mathbf{u}_0^M &= \bar{\mathbf{u}}_0^M && \text{auf } \partial\Omega_{0u}^M \end{aligned} \quad (4.2)$$

und zum anderen die mikroskopischen Probleme

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{P}^m &= 0 && \text{in } \Omega_0^m, \\ \mathbf{t}_0^m &= \bar{\mathbf{t}}_0^m && \text{auf } \partial\Omega_{0\sigma}^m, \\ \mathbf{u}_0^m &= \bar{\mathbf{u}}_0^m && \text{auf } \partial\Omega_{0u}^m, \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei jedem betrachteten makroskopischen Punkt ein mikroskopisches Randwertproblem zugeordnet wird. Ersichtlich wird, dass die makroskopischen Größen mit  $\{\bullet\}^M$  und die mikroskopischen mit  $\{\bullet\}^m$  bezeichnet werden. Über die Mittelungsbeziehung bzgl. des Volumens

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V^m} \int_{\Omega_0^m} \bullet \, dV \quad \text{mit } V^m = \int_{\Omega_0^m} dV \quad (4.4)$$

lassen sich die Homogenisierungsbeziehungen wie folgt darstellen

$$\mathbf{P}^M = \langle \mathbf{P}^m \rangle, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F}^M = \langle \mathbf{F}^m \rangle. \quad (4.6)$$

Die Spannungsmittelung, Gleichung (4.5), lässt sich auch in ein Oberflächenintegral umformen. Ausgehend von

$$\langle \mathbf{P}^m \rangle = \frac{1}{V^m} \int_{\Omega_0^m} \mathbf{P}^m \underbrace{\text{Grad}^T \mathbf{X}^m}_1 \, dV \quad (4.7)$$

und der Beziehung, zunächst in Indexnotation,

$$(\mathbf{P}_{ij}^m \mathbf{X}_k^m)_{,j} = \underbrace{\mathbf{P}_{ij,j}^m \mathbf{X}_k^m}_{\text{Div } \mathbf{P}^m = 0} + \mathbf{P}_{ij}^m \mathbf{X}_{k,j}^m = \mathbf{P}_{ij}^m \mathbf{X}_{k,j}^m \quad (4.8)$$

sowie dem Divergenztheorem

$$\int_{\Omega_0^m} (\mathbf{P}_{ij}^m \mathbf{X}_k^m)_{,j} dV = \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{P}_{ij}^m \mathbf{X}_k^m \mathbf{N}_j dA = \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{P}^m \mathbf{N} \otimes \mathbf{X}^m dA \quad (4.9)$$

mit dem zur jeweiligen RVE-Oberfläche zugeordneten Normalenvektor  $\mathbf{N}$ , ergibt sich

$$\langle \mathbf{P}^m \rangle = \frac{1}{V^m} \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{P}^m \mathbf{N} \otimes \mathbf{X}^m dA = \frac{1}{V^m} \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{t}_0^m \otimes \mathbf{X}^m dA. \quad (4.10)$$

Aus der umgeformten Spannungsmittelung, Gleichung (4.10), wird ersichtlich, dass sich mit einer konstanten Spannungsvorgabe auf der Oberfläche mit beispielsweise  $\mathbf{P}^m \mathbf{N} = \mathbf{P}^c \mathbf{N}$

$$\langle \mathbf{P}^m \rangle = \frac{1}{V^m} \mathbf{P}^c \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{N} \otimes \mathbf{X}^m dA = \frac{1}{V^m} \mathbf{P}^c \int_{\Omega_0^m} \underbrace{\text{Grad}^T \mathbf{X}^m}_1 dV = \mathbf{P}^c \quad (4.11)$$

ergibt. Der Mittelwert der Spannungen entspricht also der Vorgabe konstanter Randspannungen. Ähnliches lässt sich auch für die Mittelung des Deformationsgradienten, Gleichung (4.6), formulieren

$$\langle \mathbf{F}^m \rangle = \frac{1}{V^m} \int_{\Omega_0^m} \text{Grad} \mathbf{x}^m dV = \frac{1}{V^m} \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{x}^m \otimes \mathbf{N} dA \quad (4.12)$$

und unter Vorgabe von Randverschiebungen  $\mathbf{x}^m = \mathbf{F}^c \mathbf{X}^m$  mit konstantem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^c$

$$\langle \mathbf{F}^m \rangle = \frac{1}{V^m} \int_{\partial\Omega_0^m} \mathbf{F}^c \mathbf{X}^m \otimes \mathbf{N} dA = \frac{1}{V^m} \mathbf{F}^c \int_{\Omega_0^m} \text{Grad} \mathbf{X}^m dV = \mathbf{F}^c. \quad (4.13)$$

Demnach entspricht der Mittelwert des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^m$  dem als Randbedingung vorgegebenen konstanten Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^c$ .



## 4.2 Hill-Mandel-Bedingung

Die Hill-Mandel-Bedingung [31] stellt die wohl meist verwendete Homogenisierungsbeziehung dar. Sie fordert, dass die gemittelte virtuelle innere Arbeit der mikroskopischen Skala derjenigen der makroskopischen Skala entspricht [61]. Alternativ wird sie auch über die Äquivalenz der Spannungsleistung auf beiden Skalen

$$\langle \mathbf{P}^m : \delta \mathbf{F}^m \rangle - \mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M = 0 \quad (4.14)$$

dargestellt [63]. Um die Hill-Mandel-Bedingung zu erfüllen, schränkt sich allerdings die Wahl der Randbedingungen des RVEs ein. Zur Findung dieser Randbedingungen bietet es sich an, die Hill-Mandel-Bedingung zunächst umzuformen. Hierzu wird Gleichung (4.14) zunächst mit  $\mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M - \mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M$  erweitert und einmal  $\delta \mathbf{F}^M$  durch  $\langle \delta \mathbf{F}^m \rangle$  sowie  $\mathbf{P}^M$  durch  $\langle \mathbf{P}^m \rangle$  ersetzt. Dies liefert

$$\langle \mathbf{P}^m : \delta \mathbf{F}^m \rangle - \mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M = \underbrace{\langle \mathbf{P}^m : \delta \mathbf{F}^m \rangle}_I - \underbrace{\mathbf{P}^M : \langle \delta \mathbf{F}^m \rangle}_{II} - \underbrace{\langle \mathbf{P}^m \rangle : \delta \mathbf{F}^M}_{III} + \underbrace{\mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M}_{IV}. \quad (4.15)$$

Term  $I$  lässt sich mit

$$\text{Div}(\delta \mathbf{x}^m \mathbf{P}^m) = \underbrace{\text{Grad} \delta \mathbf{x}^m : \mathbf{P}^m}_{= \delta \mathbf{F}^m} + \delta \mathbf{x}^m \cdot \underbrace{\text{Div} \mathbf{P}^m}_{= 0} = \delta \mathbf{F}^m : \mathbf{P}^m \quad (4.16)$$

umschreiben zu

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}^m : \delta \mathbf{F}^m \rangle &= \frac{1}{V^m} \int_{\Omega_0^m} \text{Div}(\delta \mathbf{x}^m \mathbf{P}^m) \, dV = \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{x}^m \cdot \mathbf{P}^m \mathbf{N} \, dA \\ &= \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{x}^m \cdot \mathbf{t}_0^m \, dA. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Umformung von Term  $II$  führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^M : \langle \delta \mathbf{F}^m \rangle &= \frac{1}{V^m} \mathbf{P}^M : \int_{\Omega_0^m} \text{Grad} \delta \mathbf{x}^m \, dV = \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \mathbf{P}^M : (\delta \mathbf{x}^m \otimes \mathbf{N}) \, dA \\ &= \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{x}^m \cdot \mathbf{P}^M \mathbf{N} \, dA, \end{aligned} \quad (4.18)$$

während Term *III* mit Gleichung (4.10)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}^m \rangle : \delta \mathbf{F}^M &= \frac{1}{V^m} \delta \mathbf{F}^M : \int_{\partial \Omega_0^m} [\mathbf{P}^m \mathbf{N} \otimes \mathbf{X}^m] \, dA \\ &= \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m \cdot \mathbf{P}^m \mathbf{N} \, dA = \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m \cdot \mathbf{t}_0^m \, dA \end{aligned} \quad (4.19)$$

ergibt. Term *IV* kann schließlich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M &= \delta \mathbf{F}^{M^T} \mathbf{P}^M : \mathbf{1} = \frac{1}{V^m} \delta \mathbf{F}^{M^T} \mathbf{P}^M : \int_{\Omega_0^m} \text{Grad} \mathbf{X}^m \, dV \\ &= \frac{1}{V^m} \delta \mathbf{F}^{M^T} \mathbf{P}^M : \int_{\partial \Omega_0^m} \mathbf{X}^m \otimes \mathbf{N} \, dA = \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m \cdot \mathbf{P}^M \mathbf{N} \, dA \end{aligned} \quad (4.20)$$

umgeformt werden. Aufsummieren der Terme liefert

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}^m : \delta \mathbf{F}^m \rangle - \mathbf{P}^M : \delta \mathbf{F}^M &= \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{x}^m \cdot \mathbf{t}_0^m - \delta \mathbf{x}^m \cdot \mathbf{P}^M \mathbf{N} - \delta \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m \cdot \mathbf{t}_0^m \\ &+ \delta \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m \cdot \mathbf{P}^M \mathbf{N} \, dA = \frac{1}{V^m} \int_{\partial \Omega_0^m} (\delta \mathbf{x}^m - \delta \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m) \cdot (\mathbf{t}_0^m - \mathbf{P}^M \mathbf{N}) \, dA. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Aus der Darstellung der Hill-Mandel-Bedingung in Form eines Oberflächenintegrals, Gleichung (4.21), können die Randbedingungen, welche die Bedingung erfüllen, abgelesen werden. Zu ihnen gehört die Annahme von konstanten Deformationen im gesamten RVE

$$\mathbf{x}^m = \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m \quad \text{in } \Omega_0^m, \quad (4.22)$$

welche zur oberen Schranke, der Voigt-Schranke, führt. Während die Annahme von konstanten Spannungen im RVE

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^M \quad \text{in } \Omega_0^m \quad (4.23)$$

die untere Schranke, die Reuss-Schranke, liefert. Die Schranken geben dabei die obere und untere Grenze an, zwischen denen die homogenisierten Größen liegen müssen. Weiterhin lassen sich auf die Oberfläche des RVEs bezogene Randbedingungen formulieren. Hierbei sind die konstanten Spannungsrandbedingungen

$$\mathbf{t}_0^m = \mathbf{P}^M \mathbf{N} \quad \text{auf } \partial \Omega_0^m, \quad (4.24)$$

die linearen Verschiebungsrandbedingungen

$$\mathbf{x}^m = \mathbf{F}^M \mathbf{X}^m, \quad (4.25)$$

sowie die periodischen Verschiebungsrandbedingungen

$$\mathbf{x}^{m+} - \mathbf{x}^{m-} = \mathbf{F}^M \mathbf{X}^{m+} - \mathbf{F}^M \mathbf{X}^{m-} \quad (4.26)$$

zu nennen. Bei den periodischen Randbedingungen, Gleichung (4.26), wurde das Oberflächenintegral, Gleichung (4.21), in eine positive + und negative – Seite aufgeteilt und die sich ändernden Größen mit  $\{\bullet\}^+$  bzw.  $\{\bullet\}^-$  der positiven bzw. negativen Seite zugeordnet. Dies setzt allerdings voraus, dass jedem Punkt der positiven Oberfläche ein korrespondierender Punkt der negativen Oberfläche zugeordnet werden muss. Damit müssen die Oberflächen zweier gegenüberliegender Seiten des RVEs geometrisch identisch sein.



# Kapitel 5

## Rand- und Nebenbedingungen des RVEs für Stabtragwerke

In diesem Kapitel werden die Rand- und Nebenbedingungen vorgestellt, deren Weiterentwicklung einen wesentlichen Bestandteil der vorliegenden Arbeit darstellen. Da die Homogenisierung zu materiellen Eigenschaften führt, welche die geometrischen Informationen des Querschnitts beinhalten, kann nicht mehr von einer mikroskopischen Skala gesprochen werden. Daher ist es sinnvoll, diese Skala als mesoskopische Skala zu bezeichnen.

### 5.1 Ausgangsbasis der Randbedingungen

Zunächst ist es erforderlich, sich die Probleme klassischer Randbedingungen zu vergegenwärtigen.

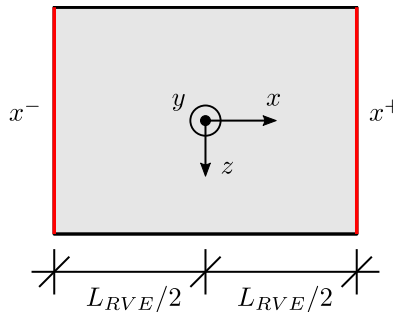


Abbildung 5.1: Ausgangsrandbedingungen.

Hierfür ist in Abb. 5.1 exemplarisch ein RVE dargestellt. Die  $x$ -Achse entspricht der Balkenreferenzachse, während in der  $y$ - und  $z$ -Richtung der Querschnitt des Balkens beschrieben wird. Über die beiden Ränder  $x^-$  und  $x^+$  können nun die Verzerrungen auf das RVE aufgebracht werden. Dies kann beispielsweise mittels periodischer Randbedingungen oder Verschiebungsrandbedingungen geschehen. Im Fall von Verschiebungsrandbedingungen ergibt sich die Relation zu

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X}. \quad (5.1)$$

Für die periodischen Randbedingungen lässt sie sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{F}\mathbf{X}^+ + \hat{\mathbf{w}} \\ \mathbf{x}^- &= \mathbf{F}\mathbf{X}^- + \hat{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

darstellen. Der Term  $\hat{\mathbf{w}}$  stellt Fluktuationen, also eine Abweichungen, der Verschiebungen gegenüber der Annahme des linearen Zusammenhangs  $\mathbf{F}\mathbf{X}$  dar. Diese werden als periodisch angenommen, d. h. sie sind auf der positiven und negativen Seite des RVEs identisch. Werden die beiden Annahmen ineinander eingesetzt, ergibt sich

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- + \mathbf{F}(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) = \mathbf{x}^- + \mathbf{F}\Delta\mathbf{X}. \quad (5.3)$$

Bei Verwendung der Balkenverzerrungen lässt sich  $\mathbf{F}$  auf verschiedene Arten darstellen, beispielsweise

$$\mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \kappa_y \cdot z - \kappa_z \cdot y & 0 & 0 \\ \gamma_y - \kappa_x \cdot z & 0 & 0 \\ \gamma_z + \kappa_x \cdot y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

oder

$$\mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \kappa_y \cdot z - \kappa_z \cdot y & 0.5 \cdot \gamma_y & 0.5 \cdot \gamma_z \\ 0.5 \cdot \gamma_y - \kappa_x \cdot z & 0 & 0 \\ 0.5 \cdot \gamma_z + \kappa_x \cdot y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

sowie

$$\mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x + \kappa_y \cdot z - \kappa_z \cdot y & \gamma_y & \gamma_z \\ -\kappa_x \cdot z & 0 & 0 \\ \kappa_x \cdot y & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Die Gleichungen (5.4) bis (5.6) unterscheiden sich nur in der Aufbringung der Schubverzerrungen  $\gamma_y$  und  $\gamma_z$ . Es ist anzumerken, dass hierbei kleine Verzerrungen vorausgesetzt werden. Zudem wird ersichtlich, dass der Balken in seiner Referenzkonfiguration gerade und unverwunden sein muss. Die Wahl nach Gleichung (5.6) ist analog zur Verschiebungsvorgabe für Schalen in [24]. Aus praktischen Gründen wird allerdings die Darstellung nach Gleichung (5.4) verwendet. Entsprechend dieser Relation ergeben sich die Deformationsmodi nach Abb. 5.2.

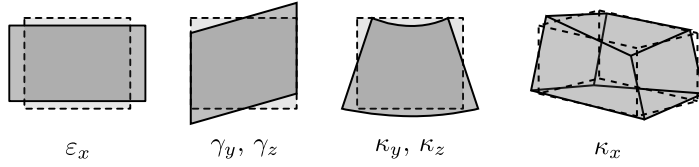


Abbildung 5.2: RVE-Deformation infolge Balkenkinematik.

Zudem entspricht diese Darstellung den kinematischen Annahmen des Balkens nach Gleichung (3.5).

## 5.2 Erfüllung der Hill-Mandel-Bedingung

Unter der Voraussetzung eines anfänglich geraden und unverwundenen Balkens lässt sich der Deformationsgradient, unter Berücksichtigung von Gleichung (3.5), mit

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] \quad (5.7)$$

darstellen. Zur Überprüfung der Hill-Mandel-Bedingung gemäß Gleichung (4.14) werden für den makroskopischen Teil die entsprechenden Balkenterme nach Gleichungen (3.9) und (3.21) und für den mesoskopischen Teil die Oberflächendarstellung Gleichung (4.17) eingesetzt. Dies ergibt

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{L_{RVE}} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{x}_0^m \cdot \mathbf{P}^m \mathbf{N} \, dA = \frac{1}{L_{RVE}} \int_{\partial \Omega_0^m} \delta \mathbf{x}_0^m \cdot \mathbf{t}_0^m \, dA. \quad (5.8)$$

Da bei der Balkenhomogenisierung die Querschnittsinformationen in den homogenisierten Werten repräsentiert sein müssen, wird aus der Mittelung bezüglich des Volumens eine Mittelung mit der RVE-Länge  $L_{RVE}$ . Für die Oberflächennormale

ergibt sich gemäß Abb. 5.1  $\mathbf{N}^+ = -\mathbf{N}^- = [1, 0, 0]^T$ .  $\mathbf{N}^-$  ist dabei die Normale der Oberfläche des RVEs bei  $x = -L_{RVE}/2$  und  $\mathbf{N}^+$  entsprechend die Normale bei  $x = L_{RVE}/2$ .

Mit der Annahme von kleinen Verzerrungen ( $\mathbf{F} \approx \mathbf{1}$ ) und somit  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} \approx \mathbf{S}$  ist

$$\mathbf{t}_0^m = \mathbf{P}^m \mathbf{N} = \mathbf{S}^m \mathbf{N} = \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{12} \\ S^{13} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Als Nächstes werden die Variationen von  $\mathbf{x}_0^m$ , genauer die Variationen der Randbedingungen, benötigt. Diese ergeben für Gleichung (5.4) aus

$$\delta \mathbf{F} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x + \delta \kappa_y \cdot z - \delta \kappa_z \cdot y & 0 & 0 \\ \delta \gamma_y - \delta \kappa_x \cdot z & 0 & 0 \\ \delta \gamma_z + \delta \kappa_x \cdot y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

zu

$$\delta \mathbf{F} \mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} & 0 & 0 & 0 & \hat{x}z & -\hat{x}y \\ 0 & \hat{x} & 0 & -\hat{x}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{x} & \hat{x}y & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \gamma_y \\ \delta \gamma_z \\ \delta \kappa_x \\ \delta \kappa_y \\ \delta \kappa_z \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

und analog für Gleichung (5.6) zu

$$\delta \mathbf{F} \mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} & 0 & \hat{x}z & -\hat{x}y \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{x}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{x}y & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \gamma_y \\ \delta \gamma_z \\ \delta \kappa_x \\ \delta \kappa_y \\ \delta \kappa_z \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Da bei den periodischen Randbedingungen  $\mathbf{F}$  mit  $\Delta \mathbf{X}$  multipliziert wird und beide Tensoren Koordinatenwerte  $x, y, z$  beinhalten, werden die zu  $\mathbf{X}$  gehörenden Koordinaten mit  $\{\bullet\}$  bezeichnet.



### 5.2.1 Verschiebungsrandbedingungen

Einsetzen von Gleichung (5.11) in die Hill-Mandel-Bedingung Gleichung (5.8) liefert für den Fall von linearen Verschiebungsrandbedingungen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{L_{RVE}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \int_{\partial \Omega_0^m} \hat{x} \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ -S^{12}z + S^{13}y \\ S^{11}z \\ -S^{11}y \end{bmatrix} dA. \quad (5.13)$$

Die Integration teilt sich dabei auf in eine Oberfläche bei  $\hat{x}^+ = L_{RVE}/2$  und eine bei  $\hat{x}^- = -L_{RVE}/2$ . Da die Oberflächennormalen  $\mathbf{N}$  in entgegengesetzte Richtungen zeigen, ergibt sich

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \int_{\partial \Omega_0^{m+}} \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ -S^{12}z + S^{13}y \\ S^{11}z \\ -S^{11}y \end{bmatrix} dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \begin{bmatrix} N \\ Q^y \\ Q^z \\ M^x \\ M^y \\ M^z \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Aus Gleichgewichtsgründen muss nur noch über eine Seite integriert werden, bspw. der positive Rand  $\partial \Omega_0^{m+}$ . Dies entspricht der Definition der Schnittgrößen nach Gleichung (3.21). Somit ist für Gleichung (5.11) die Hill-Mandel-Bedingung für lineare Verschiebungsrandbedingungen erfüllt. Die Variante nach Gleichung (5.12) hingegen liefert

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{L_{RVE}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \int_{\partial \Omega_0^m} \begin{bmatrix} S^{11} \hat{x} \\ S^{11} \hat{y} \\ S^{11} \hat{z} \\ -S^{12} \hat{x}z + S^{13} \hat{x}y \\ S^{11} \hat{x}z \\ -S^{11} \hat{x}y \end{bmatrix} dA. \quad (5.15)$$

Bis auf die Querkraftterme entspricht auch diese Variante der Definition nach Gleichung (3.21). Die Schnittgrößen ergeben sich zu

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ -\Delta M^z / L_{RVE} \\ \Delta M^y / L_{RVE} \\ M^x \\ M^y \\ M^z \end{bmatrix} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \begin{bmatrix} N \\ Q^y \\ Q^z \\ M^x \\ M^y \\ M^z \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Um zu sehen, dass auch diese Variante die richtigen Ergebnisse liefert, muss das Gleichgewicht zwischen den Querkräften und Momenten  $Q^y = -dM^z/dx$  und  $Q^z = dM^y/dx$  eingesetzt werden. Damit ist auch für diesen Fall die Erfüllung der Hill-Mandel-Bedingung gezeigt.

### 5.2.2 Periodische Randbedingungen

Für den Nachweis der periodischen Randbedingungen bietet es sich an, zunächst das Oberflächenintegral Gleichung (5.8) aufzuteilen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{L_{RVE}} \left( \int_{\partial \Omega_0^{m+}} \delta \mathbf{x}_0^{m+} \cdot \mathbf{t}_0^{m+} dA + \int_{\partial \Omega_0^{m-}} \delta \mathbf{x}_0^{m-} \cdot \mathbf{t}_0^{m-} dA \right). \quad (5.17)$$

Entsprechend der Definition der Oberflächennormale  $\mathbf{N}$  ist  $\mathbf{t}_0^{m+} = -\mathbf{t}_0^{m-}$ . Zudem sind die Oberflächen  $\partial \Omega_0^{m-}$  und  $\partial \Omega_0^{m+}$  identisch und können somit für die Integration gleichgesetzt werden. Damit ergibt sich

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{L_{RVE}} \int_{\partial \Omega_0^{m+}} (\delta \mathbf{x}_0^{m+} \cdot \mathbf{t}_0^{m+} - \delta \mathbf{x}_0^{m-} \cdot \mathbf{t}_0^{m+}) dA. \quad (5.18)$$

Entsprechend der Verzerrungsaufbringung nach Gleichung (5.3) ergibt sich schließlich

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{L_{RVE}} \int_{\partial \Omega_0^{m+}} \delta \mathbf{F} (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{t}_0^{m+} dA. \quad (5.19)$$

Durch die Wahl der Modellierung des RVEs ist  $\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- = [L_{RVE}, 0, 0]^T$ , vgl. Abb. 5.1. Somit leistet nur noch die erste Spalte von  $\mathbf{F}$  bzw.  $\delta \mathbf{F}$  einen Beitrag zur homogenisierten virtuellen inneren Arbeit. Sofort ist ersichtlich, dass für die Querkräfte der Beitrag im Fall von Gleichung (5.12) mit null durchmultipliziert

wird. Somit kann mit dieser Wahl keine Schubdeformation aufgebracht werden und die Homogenisierung liefert keine Schubsteifigkeit. Für die Verschiebungsrelation nach Gleichung (5.11) lässt sich die Hill-Mandel-Bedingung Gleichung (5.19) wieder umformen zu Gleichung (5.14) und liefert somit auch die Definition der Balkenschnittgrößen.

## 5.3 Problemstellung: Schubdeformationen des RVEs

Wie dargestellt, ist die Hill-Mandel-Bedingung im Fall von linearen Verschiebungsrandbedingungen für beide Annahmen nach Gleichungen (5.11) und (5.12) erfüllt. Im Fall periodischer Randbedingungen hat sich jedoch gezeigt, dass nur die Relation nach Gleichung (5.11), auf den ersten Blick, zu zufriedenstellenden Ergebnissen führt. Allerdings liefert Gleichung (5.12) Einblicke in die Problematik der Abbildung der Schubdeformation.

Die Problematik der Schubdeformationen im Rahmen dieser Homogenisierungsmethode wird auch in [15] angesprochen. Die genannte Lösung beschränkt sich auf die Behinderung der Starrkörperrotation infolge der Schubdeformation, wie auch im Folgenden dargelegt wird.

### 5.3.1 Starrkörperrotationen infolge periodischer Randbedingungen

Die Verzerrungs-Verschiebungsrelation nach Gleichung (5.12) zeigt, dass die Schubdeformation bei periodischen Randbedingungen keinen Beitrag zur virtuellen inneren Energie leistet. Der Grund hierfür ist, dass diese Relation zu periodischen Verschiebungsrandbedingungen mit antiperiodischen Spannungsrandbedingungen führt. Dies wird auch bei der Rückrechnung der Querkräfte aus dem Gleichgewicht in Gleichung (5.16) deutlich. Da jedoch die periodischen Randbedingungen periodische Deformationen nicht behindern, führt die Schubdeformation mit diesen Randbedingungen, auch mit der Relation nach Gleichung (5.11), zu einer reinen Starrkörperrotation mit periodischen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{w}}$ , siehe Abb. 5.3.

Die periodischen Randbedingungen sind somit in dieser Form unbrauchbar.

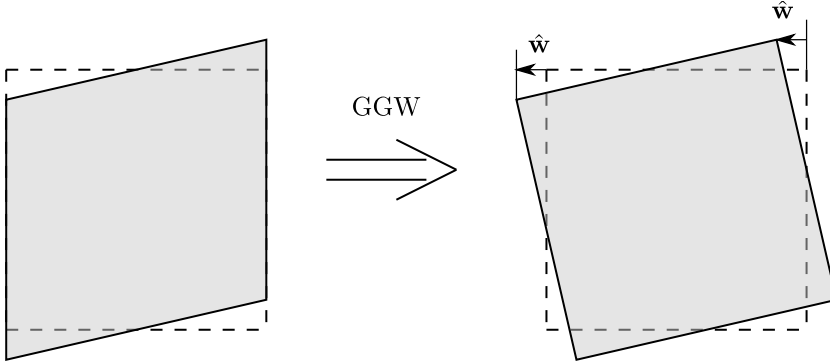


Abbildung 5.3: Starrkörperrotation infolge Schubdeformation bei periodischen Randbedingungen.

Um diese Randbedingungen dennoch verwenden zu können, muss folglich die Starrkörperrotation behindert werden. Dies kann auf verschiedene Art und Weisen geschehen. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierzu als Nebenbedingung gefordert, dass sich der Querschnitt bei  $x = 0$  im Mittel weder um die  $y$ -Achse noch um die  $z$ -Achse rotieren darf. Hierdurch wird ein Moment um die  $y$ -Achse bzw. entsprechend um die  $z$ -Achse in das RVE eingetragen. Durch die Wahl der Randbedingungen nach Gleichung (5.11) leisten diese Momente keinen direkten Beitrag zur homogenisierten virtuellen Arbeit. Sie rufen jedoch aus Gleichgewichtsgründen die entsprechenden Schubspannungen hervor. Für die Umsetzung im Rahmen der FEM sei auf Abschnitte 6.3 und 6.4 verwiesen.

### 5.3.2 Gleichgewicht und mittlere Schubdeformationen

Ein weiteres Problem der Schubdeformation ist in den Momentengleichgewichten des Balkens

$$-\frac{dM^z}{dx} = Q^y \quad \text{und} \quad \frac{dM^y}{dx} = Q^z \quad (5.20)$$

zu finden. Die Querkräfte resultieren aus den Ableitungen der Momente in Richtung der Balkenachse. Dies bedeutet, dass durch die Aufbringung der Schubdeformationen über die Querschnittsflächen bei  $x = -L_{RVE}/2$  und  $x = L_{RVE}/2$  keine reine Querkraftbeanspruchung des RVEs entsteht, sondern zusätzlich eine linear verteilte Momentenbeanspruchung.

Zur Ermittlung der resultierenden Schnittgrößenverläufe lassen sich Balkenersatz-

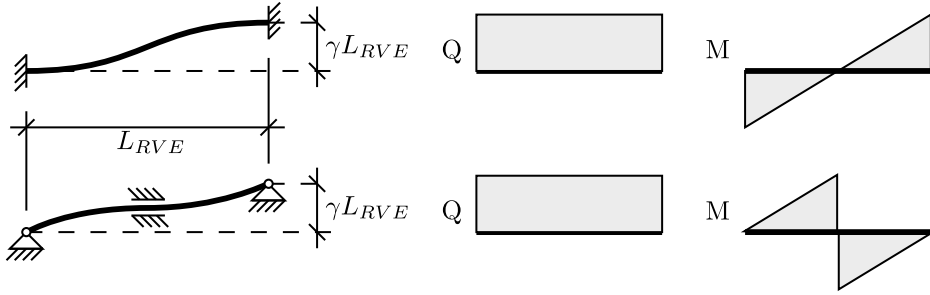


Abbildung 5.4: RVE unter Schubdeformation mit resultierendem Querkraft- (Mitte) und Momentenverlauf (rechts) – Lineare Verschiebungsrandbedingungen (oben) und periodische Randbedingungen (unten).

systeme für das RVE verwenden. Diese sind in Abb. 5.4 dargestellt. Während für die linearen Verschiebungsrandbedingungen eine links- und rechtsseitige Einspannung gilt, werden bei den periodischen Randbedingungen diese Lager im Fall einer Schubdeformation als gelenkig angenommen. Wie in Abschnitt 5.3.1 dargelegt, wird die Starrkörperrotation durch Behinderung der Querschnittsrotation in der Mitte des RVEs erreicht. Hieraus resultiert die zusätzliche Einspannung in der Mitte.

Das hier auftretende Problem betrifft die angenommene Kinematik für das RVE. Gemäß Gleichungen (5.1) und (5.3) ergeben sich die Randverschiebungen des RVEs aus einem linearen Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und der Position. Bei einer Scherung stellt sich jedoch eine Kopplung zwischen Schub- und Biegedeformation ein. Gemäß Balkentheorie ergibt sich der Zusammenhang zwischen der aufgetragenen Deformation  $\gamma L_{RVE}$  und der sich einstellenden Querkraft im System zu

$$\gamma L_{RVE} = \left( \frac{1}{12EI} L_{RVE}^2 + \frac{1}{GA_S} \right) Q L_{RVE}. \quad (5.21)$$

Wird in Gleichung (5.21)  $Q = GA_S \bar{\gamma}$  gesetzt, so wird eindeutig ersichtlich, dass der lineare Zusammenhang zwischen der Scherung und der Relativverschiebung der RVE-Enden nicht gegeben ist. Somit ist

$$\gamma \neq \bar{\gamma} = \frac{1}{L_{RVE}} \int 2E_{x\alpha} dV \quad (5.22)$$

mit  $\alpha = \{y, z\}$ . Dies bedeutet, dass der Mittelwert aus der Schubdeformation  $2E_{xy}$  bzw.  $2E_{xz}$  und die Balkenschubdeformation  $\gamma$  nicht identisch sind. Eine Möglichkeit zur Behebung dieses Problems besteht darin, den linearen Momentenverlauf infolge Querkraftbeanspruchung auf dem RVE zu null zu setzen [45]. Hierdurch entfällt der

Biegeanteil bei der Deformation und die Annahme einer linearen Verschiebungs-Verzerrungsrelation ist wieder gerechtfertigt. Alternativ kann die Annahme von konstanten Verwölbungen über die Länge des RVEs getroffen werden [44]. Beide Varianten tragen einen linearen Momentenverlauf in das RVE nach Abb. 5.4 ein. Da das Integral dieser Verläufe über die RVE-Länge verschwindet, leistet diese Nebenbedingung keinen Beitrag in der Hill-Mandel-Bedingung.

# Kapitel 6

## Finite-Elemente-Formulierungen

In diesem Abschnitt werden die verwendeten Finite-Elemente-Formulierungen vorgestellt. Die Grundlagen hierzu finden sich in vielen Literaturquellen. Einige Beispiele sind [3, 34, 80, 86, 87].

Für die folgenden Formulierungen des Balkenelements sowie des Volumenelements werden die Approximationen der Variationen der Verzerrungen sowie deren Linearisierung in die schwache Form des Gleichgewichts, Gleichung (2.58), bzw. deren Linearisierung, Gleichung (2.60), eingesetzt. Hierdurch ergibt sich aus Gleichung (2.58) der Elementlastvektor  $\mathbf{f}^e$  zu

$$\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^e = \delta \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} dV \quad (6.1)$$

unter Vernachlässigung der externen Lasten. Dabei muss gefordert werden, dass  $\delta \mathbf{v} \neq 0$ , wobei  $\mathbf{v}$  die Knotenfreiheitsgrade repräsentiert. Die Integration wird über ein einzelnes Element mit Volumen  $\Omega_e$  durchgeführt, wobei die Summation über alle Elemente schließlich die Integration über die Gesamtstruktur liefert. Analog hierzu müssen die Approximationen noch in Gleichung (2.60) eingesetzt werden, was zur Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^e$  führt und

$$\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}^e \Delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} + \mathbf{G}) dV \Delta \mathbf{v} \quad (6.2)$$

ergibt. Der Term  $\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{v}$  repräsentiert den Term  $\delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C} \Delta \mathbf{E}$  und  $\mathbf{G}$  den Term  $\Delta \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$  in Gleichung (2.60).

## 6.1 Balkenelement

Die in Kapitel 3 vorgestellte Balkentheorie wird im Folgenden mittels der FE approximiert. Hierfür werden Linienelemente mit Lagrange-Ansatzfunktionen  $N_I(\xi)$ ,  $\xi \in [-1, 1]$  verwendet, siehe Abschnitt 10.2. Die Interpolation der Referenzlinie des Balkens erfolgt mit

$$\mathbf{X}_{B0}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{X}_I, \quad \mathbf{x}_{B0}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I (\mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I). \quad (6.3)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass das Element insgesamt  $nel$  Knoten besitzt. Die Vektoren  $\mathbf{X}_I$  und  $\mathbf{u}_I$  sind die Ausgangsknotenkoordinaten und Verschiebungen des Knotens  $I$  und werden durch die zugehörigen Ansatzfunktionen  $N_I$  interpoliert.

Zudem wird jedem Knoten ein Koordinatensystem mit  $\mathbf{A}_{mI}$  in der Referenz- und  $\mathbf{a}_{mI}$  in der Momentankonfiguration zugeordnet. Das Koordinatensystem  $\mathbf{A}_{mI}$  wird dabei bei der Netzgenerierung erzeugt. Analog zu den Koordinaten der Referenzlinie werden auch

$$\mathbf{A}_m^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{A}_{mI}, \quad \mathbf{a}_m^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{a}_{mI} \quad (6.4)$$

mit den Ansatzfunktionen interpoliert. Es ist anzumerken, dass dadurch die Orthogonalität von  $\mathbf{A}_m^h$  und  $\mathbf{a}_m^h$  verloren geht. Allerdings verschwindet dieser Fehler mit zunehmender Netzverfeinerung. Die Ableitungen der Basisvektoren  $\mathbf{A}_m^h$  und  $\mathbf{a}_m^h$  werden durch Ersetzen der Ansatzfunktionen  $N_I$  mit ihren Ableitungen  $N_I'$  dargestellt. Hierbei kennzeichnet  $\{\bullet\}'$  die Ableitung nach der Bogenlänge. Mit dem isoparametrischen Konzept nach Abschnitt 10.3 ergeben sie sich zu  $N_I' = N_{I,\xi_1} / \left| \mathbf{X}_{B0,\xi}^h \right|$ .

Zur Darstellung der finiten Rotationen werden drei Rotationsfreiheitsgrade pro Knoten eingeführt, die in den Vektoren  $\boldsymbol{\omega}_I$  angeordnet sind. Um konsistent mit [22] zu bleiben, werden zudem die schiefsymmetrische Matrix  $\boldsymbol{\Omega}_I = [\boldsymbol{\omega}_I]_\times$  und der Betrag der Rotationen  $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$  definiert. Somit ist  $\boldsymbol{\Omega}_I \mathbf{h} = \boldsymbol{\omega}_I \times \mathbf{h}$ . Mit diesen Definitionen werden die finiten Rotationen mit Hilfe der Rodrigues-Formel

$$\mathbf{R} = \mathbf{1} + \frac{\sin(\omega)}{\omega} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (6.5)$$

abgebildet. Eine alternative Darstellung findet sich in Abschnitt 10.1. Es ist anzumerken, dass die Rodrigues Formel für  $\omega = n2\pi$ ,  $n = \{0, 1, 2, \dots\}$  eine Singularität



aufweist. Ein möglicher Ansatz zur Vermeidung der Singularität ist ein multiplikatives Update der Basisvektoren. In dieser Arbeit werden Rotationen größer als  $360^\circ$  jedoch ausgeschlossen. Eine Diskussion zu finiten Rotationen  $> 360^\circ$  findet sich bspw. in [10, 59].

Mit der Annahme von  $\boldsymbol{\omega}_I = \mathbf{0}$  in der Referenzkonfiguration folgt mit  $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}_I)$

$$\mathbf{a}_{mI} = \mathbf{R}_I \mathbf{A}_{mI}. \quad (6.6)$$

Entsprechend der Interpolation der Basissysteme und Knotenpositionen werden die gleichen Ansätze für ihre Variationen gewählt

$$\delta \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{a}_m^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \mathbf{a}_{mI}, \quad \Delta \delta \mathbf{a}_m^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \Delta \delta \mathbf{a}_{mI}. \quad (6.7)$$

Die Variation von  $\mathbf{a}_I$  erfolgt über

$$\delta \mathbf{a}_{mI} = \delta \mathbf{R}_I \mathbf{A}_{mI} = \delta \mathbf{R}_I \mathbf{R}_I^T \mathbf{a}_{mI} = \delta \mathbf{w}_I \times \mathbf{a}_I \quad (6.8)$$

mit der Relation nach [22] zu

$$\delta \mathbf{w}_I = \mathbf{H}_I \delta \boldsymbol{\omega}_I, \quad \mathbf{H}_I = \mathbf{1} + \frac{1 - \cos \omega_I}{\omega_I^2} \boldsymbol{\Omega}_I + \frac{\omega_I - \sin \omega_I}{\omega_I^3} \boldsymbol{\Omega}_I^2. \quad (6.9)$$

Dies führt schließlich auf

$$\delta \mathbf{a}_{mI} = -[\mathbf{a}_{mI}]_{\times} \mathbf{H}_I \delta \boldsymbol{\omega}_I = \tilde{\mathbf{R}}_I (\mathbf{A}_{mI}) \delta \boldsymbol{\omega}_I \quad (6.10)$$

mit Bezug zu Abschnitt 10.1. Hiermit lassen sich zunächst die Variationen der Balkenverzerrungen aus Gleichung (3.19) auswerten. Dies liefert

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N'_I \mathbf{R}^T & N_I \mathbf{B}_{\varepsilon I}^T \\ \mathbf{0} & N'_I \mathbf{B}_{\kappa I}^T + N_I \mathbf{B}'_{\kappa I}{}^T \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], & \mathbf{B}_{\varepsilon I} &= [\mathbf{b}_{1I}(\mathbf{x}'_{B0}), \mathbf{b}_{2I}(\mathbf{x}'_{B0}), \mathbf{b}_{3I}(\mathbf{x}'_{B0})], \\ \mathbf{B}_{\kappa I} &= [\mathbf{b}_{2I}(\mathbf{a}_3), \mathbf{b}_{3I}(\mathbf{a}_1), \mathbf{b}_{1I}(\mathbf{a}_2)], & \mathbf{B}'_{\kappa I} &= [\mathbf{b}_{2I}(\mathbf{a}'_3), \mathbf{b}_{3I}(\mathbf{a}'_1), \mathbf{b}_{1I}(\mathbf{a}'_2)], \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei

$$\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{a}_m = \mathbf{b}_{mI}(\mathbf{h}) \cdot \delta \mathbf{w}_I, \quad \mathbf{b}_{mI}(\mathbf{h}) = \mathbf{a}_{mI} \times \mathbf{h}. \quad (6.13)$$

Als Nächstes wird die geometrische Matrix  $\mathbf{G}_{IK}$  benötigt, welche den Term  $\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  in Gleichung (3.26) repräsentiert und die Terme  $\Delta \delta \mathbf{a}_m$  beinhaltet. Hierfür wird zunächst die Relation

$$\mathbf{h} \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_{mI} = \delta \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h}) \Delta \mathbf{w}_I, \quad (6.14)$$

mit  $\mathbf{M}$  nach [22], eingeführt. Über die FE-Approximationen

$$\mathbf{h} \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_{mI} = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h}) \Delta \mathbf{w}_I, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{h} \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_{mI} = \sum_{I=1}^{nel} N'_I \delta \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h}) \Delta \mathbf{w}_I \quad (6.16)$$

lässt sich die geometrische Matrix

$$\mathbf{G}_{IK} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N'_I N_K \mathbf{W}_{fK}^T \\ N_I N'_K \mathbf{W}_{fI} & \mathbf{G}_{IK}^{ww} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

darstellen. Dabei sind

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{IK}^{ww} &= N'_I N_K \hat{\mathbf{W}}_{IK}^1 + N_I N'_K \hat{\mathbf{W}}_{IK}^2 \\ &\quad + \delta_{IK} [\mathbf{M}(\mathbf{a}_{1I}, \mathbf{h}_{1I}) + \mathbf{M}(\mathbf{a}_{2I}, \mathbf{h}_{2I}) + \mathbf{M}(\mathbf{a}_{3I}, \mathbf{h}_{3I})], \\ \mathbf{h}_{1I} &= N_I N \mathbf{x}'_{B0} + N_I M^2 \mathbf{a}'_3 + N'_I M^3 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{h}_{2I} &= N_I Q^2 \mathbf{x}'_{B0} + N_I M^3 \mathbf{a}'_1 + N'_I M^1 \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{h}_{3I} &= N_I Q^3 \mathbf{x}'_{B0} + N_I M^1 \mathbf{a}'_2 + N'_I M^2 \mathbf{a}_1, \\ \hat{\mathbf{W}}_{IK}^1 &= M^1 \mathbf{W}_{2I} \mathbf{W}_{3K}^T + M^2 \mathbf{W}_{3I} \mathbf{W}_{1K}^T + M^3 \mathbf{W}_{1I} \mathbf{W}_{2K}^T, \\ \hat{\mathbf{W}}_{IK}^2 &= M^1 \mathbf{W}_{3I} \mathbf{W}_{2K}^T + M^2 \mathbf{W}_{1I} \mathbf{W}_{2K}^T + M^3 \mathbf{W}_{2I} \mathbf{W}_{3K}^T, \\ \mathbf{W}_{fI} &= [N \mathbf{a}_{1I} + Q^2 \mathbf{a}_{2I} + Q^3 \mathbf{a}_{3I}]_{\times}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Damit ergeben sich schließlich der Elementlastvektor durch Einsetzen in Gleichung (3.20)

$$\mathbf{f}_I^e = \int_S (\mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} - N_I \mathbf{q}) \, dS \quad (6.20)$$

und die Elementsteifigkeitsmatrix durch Einsetzen in Gleichung (3.26)

$$\mathbf{k}_{IK}^e = \int_S (\mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK}) \, dS. \quad (6.21)$$

Für den Elementlastvektor der äußeren Lasten wird angenommen, dass  $\mathbf{q} = [\mathbf{p}, \mathbf{0}]$  und  $\mathbf{p}$  konservative Linienlasten bezüglich der Referenzlinie des Balkens darstellen. Unter diesen Annahmen entstehen durch die Elementbelastung keine weiteren Einträge in der Elementsteifigkeitsmatrix. Für Linienlasten mit beliebigem Angriffspunkt sei auf [22] verwiesen. Weiterhin werden die Materialtangente  $\mathbf{D}$  und die Schnittgrößen  $\boldsymbol{\sigma}$  in dieser Arbeit mit dem in Kapitel 7 vorgestellten Mehrskalenmodell berechnet.

Die Integration der Terme wird numerisch mit Hilfe der Gauss-Legendre-Integration nach Abschnitt 10.3 durchgeführt. Um Schublocking zu vermeiden, werden die Elemente jedoch vollständig unterintegriert [34]. Dies bedeutet, dass ein Integrationspunkt weniger verwendet wird, als für die exakte Integration der gewählten Ansatzfunktionen erforderlich wäre.

Die bisher aufgestellte Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementlastvektor beziehen sich noch auf die Variation des axialen Vektors  $\mathbf{w}$ . Für die Berechnung soll jedoch der eingeführte Rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  als Freiheitsgrad dienen. Daher muss noch Gleichung (6.9) berücksichtigt werden. Dies führt mit

$$\mathbf{T}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_I \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

und  $\mathbf{H}_I$  nach Gleichung (6.9) auf die zu assemblierenden Elementsteifigkeitsmatrizen und -vektoren

$$\hat{\mathbf{f}}_I^e = \mathbf{T}_I^T \mathbf{f}^e, \quad \hat{\mathbf{k}}_{IK}^e = \mathbf{T}_I^T \mathbf{k}_{IK}^e \mathbf{T}_K. \quad (6.23)$$

Damit ergibt sich

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})] = \sum_{e=1}^{numel} \mathbf{A} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta\mathbf{v}_I^T (\hat{\mathbf{f}}_I^e + \hat{\mathbf{k}}_{IK}^e \Delta\mathbf{v}_K), \quad (6.24)$$

wobei  $\delta\mathbf{v} = [\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\omega}]^T$  und  $\Delta\mathbf{v} = [\Delta\mathbf{u}, \Delta\boldsymbol{\omega}]^T$  sind.

## 6.2 Volumenelement

Das 3D-Volumenelement stellt das einfachste der verwendeten Elemente dar. Die Ausgangsbasis ist die schwache Form des Gleichgewichts nach Gleichung (2.58). Über die Approximation der Ortsvektoren mit den Ansatzfunktionen nach Gleichung (10.44)

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{X}_I, \quad \mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I (\mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I), \quad (6.25)$$

sowie entsprechender Wahl der Anzahl der Elementknoten  $nel$ , lässt sich der Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor und seine Variation in der Voigt'schen Notation

$$\mathbf{E}^h = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix}^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h - 1) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h - 1) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,3}^h \cdot \mathbf{x}_{,3}^h - 1) \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,3}^h \\ \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,3}^h \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{E}^h = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,3}^h \cdot \mathbf{x}_{,3}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h + \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,3}^h + \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{,3}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,3}^h + \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{,3}^h \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

darstellen. Einsetzen der Ansatzfunktionen liefert für die Variation

$$\delta \mathbf{E}^h = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{x}_{,1}^{hT} \\ N_{I,2} \mathbf{x}_{,2}^{hT} \\ N_{I,3} \mathbf{x}_{,3}^{hT} \\ N_{I,1} \mathbf{x}_{,2}^{hT} + N_{I,2} \mathbf{x}_{,1}^{hT} \\ N_{I,1} \mathbf{x}_{,3}^{hT} + N_{I,3} \mathbf{x}_{,1}^{hT} \\ N_{I,2} \mathbf{x}_{,3}^{hT} + N_{I,3} \mathbf{x}_{,2}^{hT} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I. \quad (6.27)$$

Da die Ansatzfunktionen im Parameterraum  $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta, \zeta]$  beschrieben sind, können ihre Ableitungen zunächst nur nach diesen Koordinaten gebildet werden. Anschließend ist eine Transformation mit Hilfe des isoparametrischen Konzepts nach Gleichung (10.49) nötig.

Als Nächstes wird die Linearisierung der Variation der Green-Lagrange'schen Ver-

zerrungen benötigt. Diese ergibt sich zu

$$\Delta \delta \mathbf{E}^h = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,3}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,3}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,2}^h + \Delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,3}^h + \Delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{,3}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,3}^h + \Delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{,3}^h \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Damit ist die Kinematik vollständig mittels FE-Ansätzen beschrieben und der Elementlastvektor sowie die Elementsteifigkeitsmatrix können aufgestellt werden. Dies liefert mit der Voigt'schen Notation die dem Knoten  $I$  und  $K$  zugeordneten Einträge

$$\mathbf{f}_I^e = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_I^T \mathbf{S} - N_I \mathbf{b}_0) \, dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} N_I \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad (6.29)$$

$$\mathbf{k}_{IK}^e = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_I^T \mathbb{C} \mathbf{B}_K \, dV + \mathbf{G}_{IK}. \quad (6.30)$$

Die Spannungen  $\mathbf{S}$  und die Materialtangente  $\mathbb{C}$  stammen hierbei aus einer Materialbibliothek in FEAP [41]. Weiterhin ergibt sich die geometrische Matrix  $\mathbf{G}_{IK}$ , welche den geometrischen Anteil  $\delta \Delta \mathbf{E} : \mathbf{S}$  in Gleichung (2.60) repräsentiert, in Indexnotation zu

$$\mathbf{G}_{IK} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} S_{ij} (N_{I,i} N_{K,j} + N_{I,j} N_{K,i}) \, dV \mathbf{1}. \quad (6.31)$$

## 6.3 Interfacelement – konstante Spannungen

In diesem Abschnitt wird ein Interfacelement zur Kopplung des Volumenmodells mit einem Balkenelement vorgestellt. Dies wird über konstante Spannungsrandbedingungen entsprechend [51] erreicht, wobei die Nebenbedingung im globalen Gleichungssystem gelöst wird. Hierfür muss die Beschreibung der Bewegung des Querschnitts im Raum auf einen Punkt reduziert werden. Dies kann durch die Einführung einer Ebene  $E_I$  erreicht werden, siehe Abb. 6.1. In der Ausgangskonfiguration ist ihre Lage im Raum eindeutig durch den zu koppelnden und in ihr

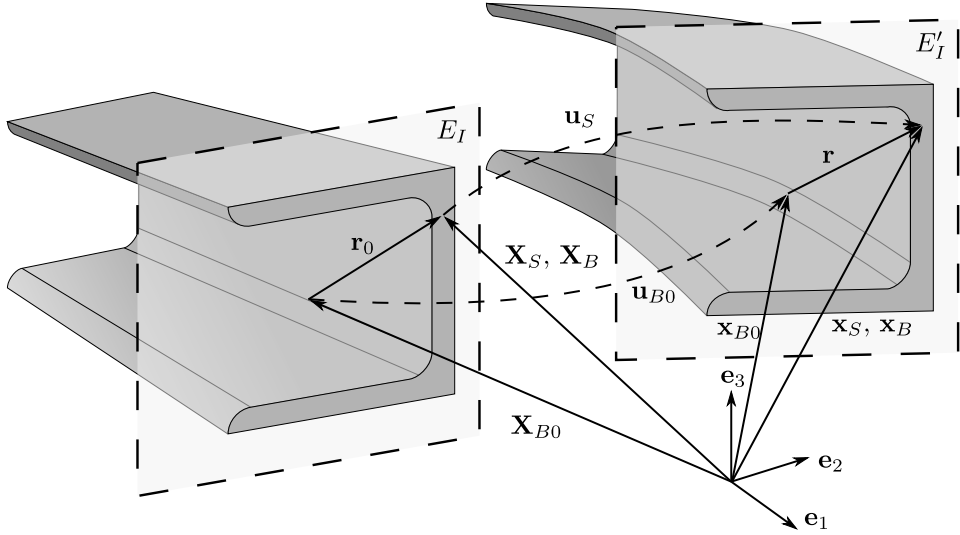


Abbildung 6.1: Kinematik – Interfacelement.

liegenden Querschnitt definiert, welcher über das Volumenmodell beschrieben wird. Die zur Beschreibung des Querschnitts erforderlichen Ortsvektoren werden mit  $\mathbf{X}_S$  bezeichnet. Weiterhin wird der Punkt  $\mathbf{X}_{B0}$  eingeführt. Auch dieser Punkt liegt in der Ebene  $E_I$  und zudem auf der Bezugsachse des Balkenmodells. Durch Einführung eines Vektors  $\mathbf{r}_0$  ist es nun möglich, den Querschnitt ein zweites Mal zu beschreiben. Dies geschieht mit den Ortsvektoren  $\mathbf{X}_B$  und  $\mathbf{r}_0$  und ergibt den Zusammenhang

$$\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_B = \mathbf{X}_{B0} + \mathbf{r}_0 \quad (6.32)$$

in der Ausgangskonfiguration. In Gleichung (6.32) sind die Größen  $\mathbf{X}_S$  und  $\mathbf{X}_{B0}$  eindeutig definiert, wohingegen sich  $\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_S$  und  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{X}_S - \mathbf{X}_{B0}$  rechnerisch aus ihnen ergeben.

Da nun alle Größen in der Ausgangskonfiguration beschrieben sind, kann in die Momentankonfiguration übergegangen werden. Diese ergibt sich durch verschieben und rotieren der Ebene  $E_I$  in die Lage  $E'_I$ . Die Translation wird dabei durch den Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}_{B0}$  beschrieben, während die Rotation durch Einführung eines axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega}$  beschrieben wird. Der Punkt  $\mathbf{X}_{B0}$ , der Vektor  $\mathbf{r}_0$  und damit auch der Punkt  $\mathbf{X}_B$  bleiben bezüglich der Ebene fest. Dies bedeutet, dass sie identisch zur Ebene verschoben und rotiert werden. Damit ergibt sich ihre Lage und

Orientierung in der Momentankonfiguration zu

$$\mathbf{x}_{B0} = \mathbf{X}_{B0} + \mathbf{u}_{B0}, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{r}_0, \quad (6.34)$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_{B0} + \mathbf{r}. \quad (6.35)$$

Es ist anzumerken, dass die Größen in den Gleichungen (6.33) bis (6.35) nur von den Verschiebungen  $\mathbf{u}_{B0}$ , dem axialen Vektor  $\omega$  und ihrer Ausgangskonfiguration abhängen. Im Gegensatz dazu ist für den Querschnitt selbst jedem Punkt  $\mathbf{X}_S$  eine Verschiebung  $\mathbf{u}_S$  zugeordnet. Dies führt auf die Beziehung

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{X}_S + \mathbf{u}_S. \quad (6.36)$$

Mit Gleichung (6.35) und Gleichung (6.36) ist der Querschnitt in seiner Momentankonfiguration einmal aus Sicht des Kopplungspunktes zum Balkenmodell sowie aus Sicht des Volumenmodells beschrieben. Um nun beide Modelle miteinander zu verbinden, wird gefordert, dass

$$\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B = 0. \quad (6.37)$$

Die Nebenbedingung, Gleichung (6.37), kann, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, durch Erweiterung des Potentials in das System eingebaut. Die später folgende erste Variation, Gleichung (6.41), stellt die allgemeingültige Form dar, für welche die Existenz eines Potentials nicht vorausgesetzt werden muss. Zur Erweiterung können beispielsweise Lagrange-Parameter verwendet werden, was zu

$$\Pi = \dots + \int \Lambda (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_B) dA \quad (6.38)$$

führt. Hierbei ist anzumerken, dass Gleichung (6.38) eine Erfüllung der Nebenbedingung, Gleichung (6.37), im integralen Sinn darstellt. Dies bedeutet, dass abhängig von der Wahl der Lagrange-Parameter die Bedingung in jedem Punkt oder aber nur im integralen Mittel erfüllt wird. Die Erfüllung von Gleichung (6.38) in jedem Punkt bedeutet, dass die Formtreue und das Ebenbleiben des Querschnitts erzwungen werden. Hingegen kann sich der Querschnitt, bei Erfüllung im integralen Mittel, beliebig deformieren. Von Interesse ist an dieser Stelle nur die im Mittel,

gemäß Balkenkinematik, zu erfüllende Nebenbedingung. Dies bedeutet, dass, analog zur Beschreibung der Bewegung der Ebene durch drei Translationen und drei Rotationen, die Nebenbedingung durch drei Kräfte und drei Momente zu erzwingen ist. Somit ergeben sich die Lagrange-Parameter zu

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}. \quad (6.39)$$

Dabei können  $\boldsymbol{\lambda}$  als Kräfte pro Fläche interpretiert werden und  $\boldsymbol{\mu}$  als zu Momenten äquivalente Parameter. Damit ergibt sich für  $\mathbf{\Lambda}$  die Bedeutung eines Spannungsvektors. Damit nun die Nebenbedingung, Gleichung (6.38), nur im Mittel erfüllt wird, sind die insgesamt sechs Parameter  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\boldsymbol{\mu}$  konstant bezüglich des Querschnitts zu wählen.

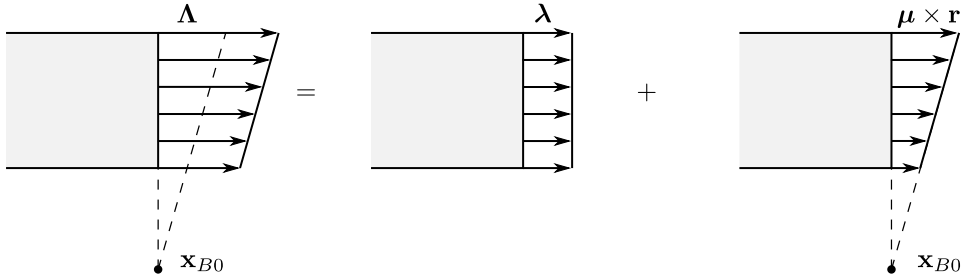


Abbildung 6.2: Spannungsverteilung infolge Lagrange-Parameter.

Abbildung 6.2 zeigt die resultierende Spannungsverteilung infolge der gewählten Lagrange-Parameter. Es ist anzumerken, dass die Spannungsverteilung unabhängig von der materiellen und geometrischen Beschaffenheit des Querschnitts ist. Das Interfaceelement führt somit zu konstanten Spannungsrandbedingungen. Dies ist nur für die Normalkomponenten der Spannungen im Falle homogener und linear elastischer Querschnitte gültig. Zudem verletzt die Annahme konstanter Schubspannungen über den Querschnitt die Spannungsrandbedingungen.

Einsetzen der Lagrange-Parameter, Gleichung (6.39), in die Nebenbedingung, Gleichung (6.38), liefert mit Gleichung (6.35)

$$\begin{aligned} & \int (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0} - \mathbf{r}) \, dA \\ &= \int \{ \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0} - \mathbf{r}) + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r} \cdot (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0}) \} \, dA. \end{aligned} \quad (6.40)$$



Die Variation von Gleichung (6.40) liefert

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = & \int \{ \delta \mathbf{x}_S (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) + \delta \mathbf{x}_{B0} (-\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) \\
 & + \delta \mathbf{r} (-\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0}) \times \boldsymbol{\mu}) + \delta \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0} - \mathbf{r}) + \delta \boldsymbol{\mu} (\mathbf{r} \times (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0})) \} dA \\
 & = 0. \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

Wobei sich die einzelnen Variationen zu

$$\delta \mathbf{x}_S = \delta \mathbf{u}_S \quad (6.42)$$

$$\delta \mathbf{x}_{B0} = \delta \mathbf{u}_{B0} \quad (6.43)$$

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{R}} \delta \boldsymbol{\omega} \quad (6.44)$$

ergeben. Abschließend wird die Linearisierung von Gleichung (6.41) benötigt. Diese ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 Dg(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) \cdot \Delta \mathbf{v} = & \int \{ \delta \mathbf{x}_S (\Delta \boldsymbol{\lambda} + [\boldsymbol{\mu}]_{\times} \Delta \mathbf{r} - [\mathbf{r}]_{\times} \Delta \boldsymbol{\mu}) \\
 & + \delta \mathbf{x}_{B0} (-\Delta \boldsymbol{\lambda} - [\boldsymbol{\mu}]_{\times} \Delta \mathbf{r} + [\mathbf{r}]_{\times} \Delta \boldsymbol{\mu}) \\
 & + \delta \mathbf{r} (-\Delta \boldsymbol{\lambda} + [\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0}]_{\times} \Delta \boldsymbol{\mu} - [\boldsymbol{\mu}]_{\times} (\Delta \mathbf{x}_S - \Delta \mathbf{x}_{B0})) \\
 & + \Delta \delta \mathbf{r} (-\boldsymbol{\lambda} + [\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0}]_{\times} \boldsymbol{\mu}) \\
 & + \delta \boldsymbol{\lambda} (\Delta \mathbf{x}_S - \Delta \mathbf{x}_{B0} - \Delta \mathbf{r}) \\
 & + \delta \boldsymbol{\mu} ([\mathbf{r}]_{\times} (\Delta \mathbf{x}_S - \Delta \mathbf{x}_{B0}) - [\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{B0}]_{\times} (\Delta \mathbf{r})) \} dA. \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

Analog zu den Variationen können die Linearisierungen wie folgt geschrieben werden:

$$\Delta \mathbf{x}_S = \Delta \mathbf{u}_S, \quad (6.46)$$

$$\Delta \mathbf{x}_{B0} = \Delta \mathbf{u}_{B0}, \quad (6.47)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R} \mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{R}} \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (6.48)$$

$$\Delta \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \Delta \delta \mathbf{R} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{a} = \delta \boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{R}} \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (6.49)$$

Für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementresiduums müssen nun entsprechende Ansätze für die Unbekannten gewählt werden. Wie erwähnt sollen die Lagrange-Parameter konstant für den gesamten Querschnitt sein. Somit sind sie auch in jedem einzelnen Element konstant. Daher werden ihre Ansatz-

funktionen konstant als 1 gewählt. Entsprechendes gilt für die Balkenfreiheitsgrade  $\mathbf{u}_{B0}$  und  $\boldsymbol{\omega}$ . Die verbleibenden Größen  $\mathbf{x}_S$  bzw.  $\mathbf{u}_S$  werden mittels Standardscheibenelementen approximiert, d.h. es werden bilineare, biquadratische oder Ansätze höherer Ordnung gewählt. Entsprechend ergeben sich die approximierten Größen zu

$$\mathbf{x}_S^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{x}_{SI} = \sum_{I=1}^{nel} N_I (\mathbf{X}_{SI} + \mathbf{u}_{SI}), \quad (6.50)$$

$$\delta \mathbf{x}_S^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \mathbf{x}_{SI} = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \mathbf{u}_{SI}, \quad (6.51)$$

$$\Delta \mathbf{x}_S^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \Delta \mathbf{x}_{SI} = \sum_{I=1}^{nel} N_I \Delta \mathbf{u}_{SI}, \quad (6.52)$$

$$\mathbf{r}_0^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{X}_{SI} - \mathbf{X}_{B0}, \quad (6.53)$$

$$\mathbf{r}^h = \mathbf{R} \mathbf{r}_0^h. \quad (6.54)$$

Dabei ist  $(\dots)^h$  die mittels Ansatzfunktionen approximierte Größe,  $(\dots)_I$  der zugehörige Knotenwert mit Ansatzfunktion  $N_I$  und  $nel$  die Anzahl der Scheibenknoten pro Element. Für die Größen  $\mathbf{u}_{B0}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\boldsymbol{\mu}$  ist auf Grund ihrer konstanten Ansatzfunktionen keine Unterscheidung zwischen Knotenwerten und approximierten Größen erforderlich.

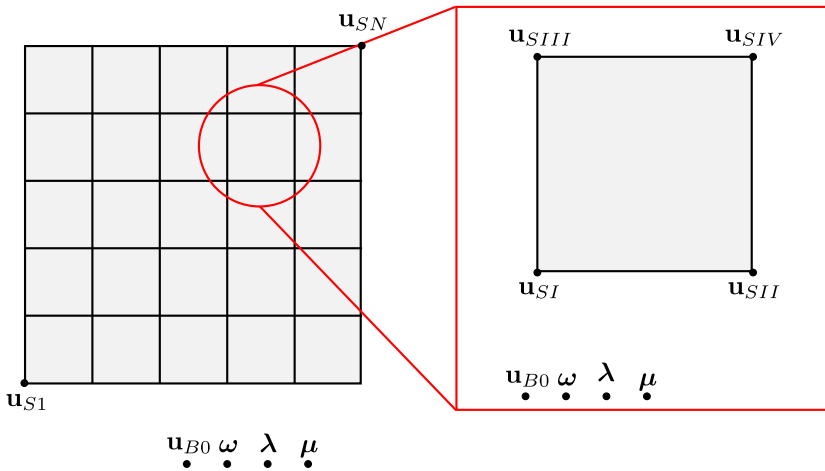


Abbildung 6.3: Resultierendes Element – links: Querschnitt mit Netz, rechts: einzelnes bilineares Element.

Abbildung 6.3 stellt schematisch das resultierende FE-Netz (links) sowie ein einzelnes bilineares Element (rechts) dar. Dabei sind  $\mathbf{u}_{S1}$  bis  $\mathbf{u}_{SN}$  die globalen Freiheitsgrade des Querschnitts und  $\mathbf{u}_{SI}$  bis  $\mathbf{u}_{SIV}$  die lokalen Freiheitsgrade des Elements. Essentiell ist hierbei, dass die Freiheitsgrade  $\mathbf{u}_{B0}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\boldsymbol{\mu}$  global sind, d.h. es sind in jedem Element des Querschnitts die gleichen Freiheitsgrade.

Damit ergeben sich der Elementlastvektor und die Elementsteifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab} & \mathbf{k}_{ac} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ae} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{bd} & \mathbf{k}_{be} \\ \mathbf{k}_{ca} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{cd} & \mathbf{k}_{ce} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{db} & \mathbf{k}_{dc} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{de} \\ \mathbf{k}_{ea} & \mathbf{k}_{eb} & \mathbf{k}_{ec} & \mathbf{k}_{ed} & \mathbf{k}_{ee} \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Da hierbei die Nebenbedingung mit Hilfe von Lagrange-Parametern erzwungen wird, entsteht ein indefinites Problem, auch erkennbar an den Null-Einträgen auf der Hauptdiagonalen in Gleichung (6.55). Mit der Definition

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 & \cdots & N_{nel} & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 & \cdots & 0 & N_{nel} & 0 \\ 0 & 0 & N_I & \cdots & 0 & 0 & N_{nel} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

können die Einträge im Lastvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \int \bar{\mathbf{N}}^T (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) \, dA, & \mathbf{f}_b &= \int (\mathbf{x}_S^h - \mathbf{x}_{B0} - \mathbf{r}^h) \, dA, \\ \mathbf{f}_c &= \int \mathbf{r}^h \times (\mathbf{x}_S^h - \mathbf{x}_{B0}) \, dA, & \mathbf{f}_d &= \int (-\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}^h) \, dA, \\ \mathbf{f}_e &= \int \tilde{\mathbf{R}}^T (-\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{x}_S^h - \mathbf{x}_{B0}) \times \boldsymbol{\mu}) \, dA. \end{aligned} \quad (6.57)$$

angegeben werden. Analog hierzu ergeben sich diejenigen der Elementsteifigkeits-

matrix zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{ab} &= \mathbf{k}_{ba}^T = \int \bar{\mathbf{N}}^T dA, & \mathbf{k}_{ac} &= \mathbf{k}_{ca}^T = - \int \bar{\mathbf{N}}^T [\mathbf{r}^h]_{\times} dA, \\
 \mathbf{k}_{ae} &= \mathbf{k}_{ea}^T = \int \bar{\mathbf{N}}^T [\boldsymbol{\mu}]_{\times} \tilde{\mathbf{R}} dA, & \mathbf{k}_{bd} &= \mathbf{k}_{db}^T = -\mathbf{1} \int dA, \\
 \mathbf{k}_{be} &= \mathbf{k}_{eb}^T = - \int \tilde{\mathbf{R}} dA, & \mathbf{k}_{cd} &= \mathbf{k}_{dc}^T = - \int [\mathbf{r}]_{\times} dA, \\
 \mathbf{k}_{ce} &= \mathbf{k}_{ec}^T = - \int [\mathbf{x}_S^h - \mathbf{x}_{B0}]_{\times} \tilde{\mathbf{R}} dA, & \mathbf{k}_{de} &= \mathbf{k}_{ed}^T = - \int [\boldsymbol{\mu}]_{\times} \tilde{\mathbf{R}} dA, \\
 \mathbf{k}_{ee} &= \int \hat{\mathbf{R}} dA.
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Mit den Gleichungen (6.57) und (6.58) ist das Element vollständig beschrieben. Für die numerische Umsetzung ist es allerdings noch erforderlich, die Integrale mittels geeigneter Integrationsmethode auszuwerten. Dies geschieht mit den in Abschnitt 10.3 dargestellten Beziehungen für das Scheibenelement. Damit dies durchführbar ist, müssen die Knotenkoordinaten zunächst in ein lokales Koordinatensystem  $\mathbf{A}_i$  der Ebene  $E_I$  transformiert werden, siehe Abb. 6.4.

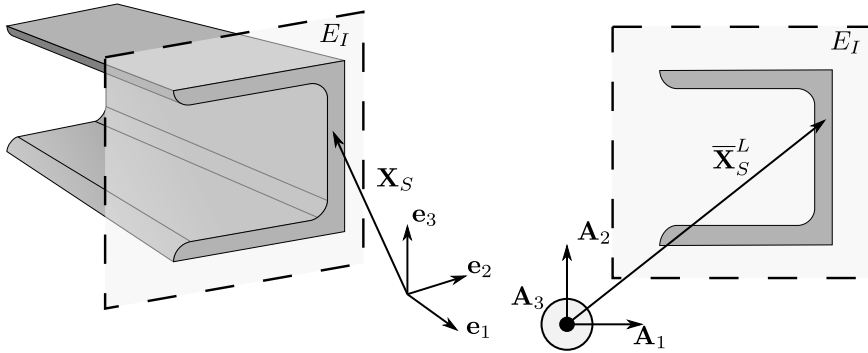


Abbildung 6.4: Darstellung des Querschnitts in globalen Koordinaten (links) und lokalen Koordinaten (rechts).

Durch Orthogonaltransformation der Form

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{e}_i \tag{6.59}$$

lassen sich die Knotenkoordinaten in das lokale System transformieren

$$\mathbf{x}_S^L = \mathbf{T}^T \mathbf{x}_S. \tag{6.60}$$

Infolge der Transformation kann die geometrische Beschreibung um eine Dimension reduziert werden. Dadurch ergibt sich

$$\overline{X}_{S\alpha\beta}^L = X_{s\alpha\beta}^L, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}. \quad (6.61)$$

Mit der lokalen Beschreibung der Koordinaten  $\overline{\mathbf{X}}_S^L$  kann die Jacobi-Matrix nach Gleichung (10.46) ermittelt werden. Des Weiteren können mit Hilfe der Jacobi-Determinante die Flächenintegrale die durch numerische Integration nach Gleichung (10.53) ausgewertet werden.

## 6.4 Reduziertes Interface – konstante Verzerrungen

Da die Normalspannungsverteilung über den Querschnitt einen maßgeblichen Einfluss auf die Schubspannungsverteilung hat, wird an dieser Stelle ein zum Interfaceelement aus Abschnitt 6.3 ähnliches, jedoch speziell für das RVE reduziertes Interfaceelement mit der Annahme von konstanten Verzerrungen eingeführt. Hierbei wird geometrische und physikalische Linearität vorausgesetzt. Dieses Element soll nur die Starrkörperrotationen infolge Schubdeformation sowie die Translation in  $x$ -Richtung verhindern. Die hierfür nötige Nebenbedingung lautet

$$\sigma_x - \overline{\sigma}_x = 0. \quad (6.62)$$

Durch diese Reduktion muss die Nebenbedingung mit drei Lagrange-Parametern erfüllt werden. Die Parameter  $\lambda_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$  beschreiben hierbei jeweils eine Translation in  $x$ -Richtung, eine Rotation um die  $y$ -Achse, sowie eine Rotation um die  $z$ -Achse. Die Nebenbedingungen führen wieder zu entsprechenden Lasten, welche über die Querschnittsfläche eingetragen werden sollen. Allerdings werden für die Ermittlung der Spannungen die entsprechenden Verzerrungen benötigt, welche sich nur innerhalb eines Volumens ermitteln lassen. Somit ergibt sich für dieses Interface die Gleichung

$$\int_{V_I} (\sigma_x - \overline{\sigma}_x) (\lambda_x + \mu_y z - \mu_z y) dV = 0. \quad (6.63)$$

Hierbei kennzeichnet  $\sigma_x$  die  $x$ -Komponente der Spannungen eines linear elastischen Volumenelements,  $\overline{\sigma}_x$  die  $x$ -Komponente der Volumenspannungen mit modifizierter Kinematik,  $\lambda_x$  ein Lagrange-Parameter für die Translation in  $x$ -Richtung und  $\mu_y$ ,  $\mu_z$  die Lagrange-Parameter für die Rotationen um die  $y$ -Achse, respektive  $z$ -Achse.

Mit Hilfe von  $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_x, \mu_y, \mu_z]^T$  und  $\mathbf{\bar{p}} = [1, z, -y]^T$  wird das Gesamtpotential, analog zu Gleichung (6.38), mit Gleichung (6.63) zu

$$\Pi = \dots + \underbrace{\int_{V_I} (\sigma_x - \bar{\sigma}_x) \mathbf{\bar{p}} \cdot \mathbf{\Lambda} dV}_{\Pi_C} \quad (6.64)$$

erweitert. Auch hier liefert die folgende Variation nach Gleichung (6.65) die allgemeine Form, für welche kein Potential mehr vorausgesetzt werden muss. Der Anteil, welcher infolge des Interfacelements hinzukommt, wird als  $\Pi_C$  bezeichnet. Die erste Variation von Gleichung (6.64) liefert

$$g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = \int_{V_I} \{ \bar{\mathbb{C}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_C - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_C) \mathbf{\bar{p}} \cdot \mathbf{\Lambda} + (\sigma_x - \bar{\sigma}_x) \mathbf{\bar{p}} \cdot \delta \mathbf{\Lambda} \} dV. \quad (6.65)$$

Hierbei ist  $\bar{\mathbb{C}} = \partial \sigma_x / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_C$  eine modifizierte linear-elastische Materialtangente (1. Zeile des St. Venant-Kirchhoff'schen Materialgesetzes, Gleichung (2.40)),  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_C$  die Variation der Volumenverzerrungen und  $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_C$  die modifizierte Form der Variation der Verzerrungen. Eine genauere Darstellung der Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_C$  erfolgt in Gleichung (6.70). Es ist wieder anzumerken, dass die erste Variation allgemeingültig ist und kein Potential voraussetzt. Die Linearisierung ergibt sich hier sofort zu

$$\Delta \delta \Pi_C = \int_{V_I} \{ \bar{\mathbb{C}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_C - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_C) \mathbf{\bar{p}} \cdot \Delta \mathbf{\Lambda} + \bar{\mathbb{C}} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_C - \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_C) \mathbf{\bar{p}} \cdot \delta \mathbf{\Lambda} \} dV. \quad (6.66)$$

Entsprechend dieser Annahmen ergeben sich Geometrie und Elementaufbau nach Abb. 6.5. Hierbei ist das Volumen des Interfacelements  $V_I$  grau gefärbt. Über die etwas dunkler gefärbte Fläche des Querschnitts sollen schließlich die aus dem Interface resultierenden Kräfte in das RVE eingeleitet werden. Um dies zu erreichen, müssen die Knoten des Elements *nel* aufgeteilt werden in die zur Oberfläche gehörenden Knoten *nel<sub>S</sub>* (rot) und die übrigen Knoten des Volumenelements *nel<sub>V</sub>*. Damit lassen sich die Knotenfreiheitsgrade darstellen als

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}^V, \mathbf{u}^S]. \quad (6.67)$$

Für den gesamten Interfacebereich gibt es einen geteilten Knoten (grün) mit den Lagrange-Parametern  $\Lambda$ .

Die Approximation der Verschiebungen erfolgt mit den identischen Ansatzfunktio-

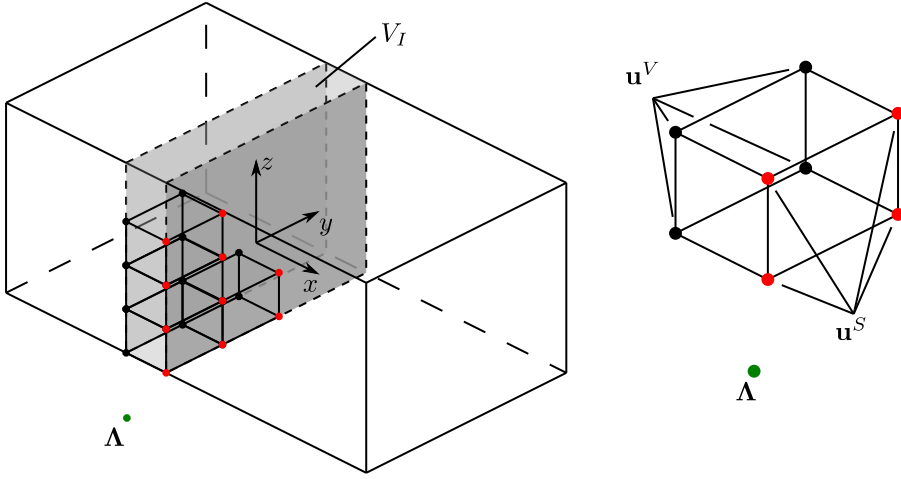


Abbildung 6.5: Resultierendes Element – links: Querschnitt mit Netz, rechts ein-  
zelnes bilineares Element.

nen des Volumenelements nach Abschnitt 6.2 zu

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel_V+nel_S} N_I \mathbf{u}_I, \quad \delta \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel_V+nel_S} N_I \delta \mathbf{u}_I. \quad (6.68)$$

Hierdurch ergeben sich die Variationen der Verzerrungen zu

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_C^h = \sum_{I=1}^{nel_V+nel_S} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^{nel_V+nel_S} \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,z} \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 \\ N_{I,z} & 0 & N_{I,x} \\ 0 & N_{I,z} & N_{I,y} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_I, \quad (6.69)$$

wobei der Fall von geometrisch linearen Verzerrungen genügen soll. Entsprechendes gilt für die Linearisierung  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_C$ . Für die Terme mit  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_C$  wird eine modifizierte Kinematik angenommen. Dies bedeutet, dass der Beitrag der Oberflächenknoten

$nel_S$  modifiziert wird zu

$$\begin{aligned} \delta \bar{\varepsilon}_C^h &= \sum_{I=1}^{nel_V} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I^V + \sum_{J=1}^{nel_S} \bar{\mathbf{B}}_J \delta \mathbf{u}_J^S \\ &= \sum_{I=1}^{nel_V} \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,z} \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 \\ N_{I,z} & 0 & N_{I,x} \\ 0 & N_{I,z} & N_{I,y} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_I^V + \sum_{J=1}^{nel_S} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{J,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{J,z} \\ N_{J,y} & N_{J,x} & 0 \\ N_{J,z} & 0 & N_{J,x} \\ 0 & N_{J,z} & N_{J,y} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_J^S. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Damit bleibt für die Differenzen der Variationen

$$(\delta \bar{\varepsilon}_C^h - \delta \bar{\varepsilon}_C^h) = \sum_{J=1}^{nel_S} \begin{bmatrix} N_{J,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_J^S = \tilde{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}. \quad (6.71)$$

Unter Berücksichtigung der ersten Variation, Gleichung (6.65), wird direkt ersichtlich, dass die aus dem Interface resultierenden Kräfte nur über die zuvor definierten Oberflächenknoten  $nel_S$  in das RVE eingetragen werden. Die Lagrange-Parameter werden, analog zum Interfaceelement in Abschnitt 6.3, als konstant bzgl. des Interfacevolumens  $V_I$  angenommen. Einsetzen der Ansätze in Gleichung (6.65) liefert für den Elementlastvektor

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \int_{V_I} \tilde{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \, dV \\ \int_{V_I} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} \, dV \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Analog hierzu ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix aus der zweiten Variation, Gleichung (6.66), zu

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ab}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ mit } \mathbf{k}_{ab} = \int_{V_I} \tilde{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{p}} \, dV. \quad (6.73)$$

Durch die Erzwingung der Nebenbedingung mit Hilfe von Lagrange-Parametern ergeben sich, wie beim Interfaceelement aus Abschnitt 6.3, Null-Einträge auf der Hauptdiagonalen der Steifigkeitsmatrix.



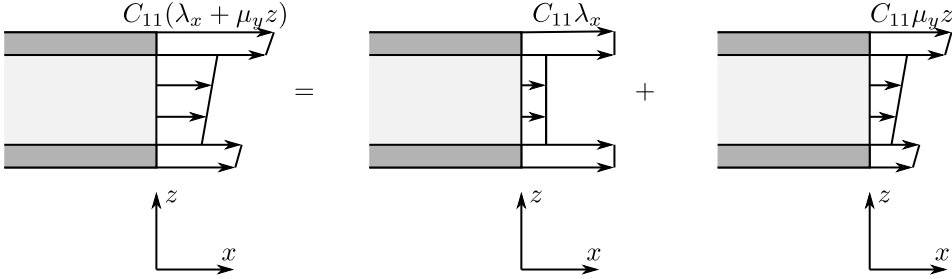


Abbildung 6.6: Resultierende Normalspannungsverteilung infolge des Interfaceelements bei einem geschichteten Querschnitt am Beispiel eines weichen Kerns und steifen Deckschichten.

Damit ist das Interfaceelement vollständig beschrieben. Im Gegensatz zum Interfaceelement nach Abschnitt 6.3 wird hier die Normalspannungsverteilung infolge Inhomogenitäten im Querschnitt berücksichtigt, vgl. Abb. 6.2 und Abb. 6.6. Die Lagrange-Parameter können dabei als Dehnung in Längsrichtung  $\lambda_x$  sowie Krümmungen  $\mu_y$ ,  $\mu_z$  um die  $y$ -Achse und  $z$ -Achse interpretiert werden.

## 6.5 Nebenbedingung – Lineares Moment

Das letzte hier vorgestellte Element dient zur Umsetzung der Nebenbedingung an den linearen Momentenverlauf. Hierbei soll das linear verteilte Moment infolge der Querkraft im Mittel auf null gesetzt werden. Die Nebenbedingung lässt sich zunächst wie folgt darstellen

$$\int_V \sigma_x (\lambda_x + y\mu_z - z\mu_y) dV = 0. \quad (6.74)$$

Da die Nebenbedingung im Mittel für das gesamte RVE gelten soll, stellt Gleichung (6.74) insgesamt drei Nebenbedingungen dar. Analog zum Interfaceelement aus Abschnitt 6.4 wird auch diese Nebenbedingung dem Potential hinzugefügt

$$\Pi = \dots + \underbrace{\int_V \sigma_x \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Lambda} dV}_{\Pi_C}. \quad (6.75)$$

Dabei ist  $\bar{\mathbf{p}} = [1, -z, y]^T$  und  $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_x, \mu_y, \mu_z]^T$ . Auch hier führt die erste Variation auf die allgemeine Form, welcher kein Potential mehr zugrunde gelegt werden muss.

Diese liefert hierbei

$$\delta\Pi_C = \int_V (\delta\sigma_x \bar{\mathbf{p}} \mathbf{\Lambda} + \sigma_x \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{\Lambda}) \, dV. \quad (6.76)$$

Die entsprechende Linearisierung lautet

$$\Delta\delta\Pi_C = \int_V (\delta\sigma_x \bar{\mathbf{p}} \Delta \mathbf{\Lambda} + \Delta\sigma_x \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{\Lambda}) \, dV. \quad (6.77)$$

Unter Annahme von linearer Elastizität und geometrischer Linearität ergibt sich die Variation von  $\sigma_x$  zu

$$\delta\sigma_x = \sum_{I=1}^{nel} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I. \quad (6.78)$$

Für  $\mathbf{u}$  werden hierbei die Standardansatzfunktionen, bspw. nach Abschnitt 10.2 für Volumenelemente, verwendet. Für die Ansatzfunktionen der Lagrange-Parameter wird hingegen die Form des resultierenden Momentenverlaufs infolge einer Schubdeformation des RVEs gewählt, vgl. Abb. 5.4. Im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen für die Verschiebungen sind diese global für das gesamte RVE.

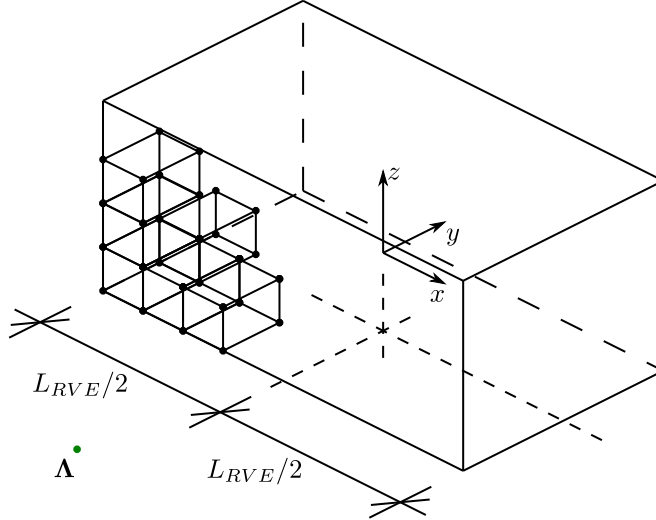


Abbildung 6.7: RVE-Geometrie mit Netz für Nebenbedingung.

Die Geometrie des RVEs mit angedeutetem Netz für die Nebenbedingung ist in Abb. 6.7 dargestellt. Unter Berücksichtigung von Abb. 5.4 lassen sich die Ansatzfunktionen für die Lagrange-Parameter aufstellen. Diese sind im Fall von Verschie-

bingungsrandbedingungen

$$N_{\Lambda} = x \quad (6.79)$$

und im Fall von periodischen Randbedingungen

$$N_{\Lambda} = \begin{cases} x + \frac{1}{2}L_{RVE}, & x < 0 \\ x - \frac{1}{2}L_{RVE}, & x > 0 \end{cases}. \quad (6.80)$$

Es ist anzumerken, dass der Sprung in den Ansatzfunktionen in Gleichung (6.80) keine Probleme bereitet, da die Ansatzfunktionen entsprechend der Position des Interfacelements nach Abschnitt 6.4 gewählt werden müssen. Somit ist der Sprung an der Elementgrenze und kann problemlos dargestellt werden.

Der Elementlastvektor und die Elementsteifigkeitsmatrix nehmen die gleiche Form wie beim Interfacelement nach Abschnitt 6.4 an. Somit ergibt sich

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} dV \\ \int_V \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{u} dV \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

und

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ab}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ mit } \mathbf{k}_{ab} = \int_V \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{p}}^T dV. \quad (6.82)$$

An dieser Stelle könnte das Interfacelement als fertig angesehen werden. Jedoch liefert die Auswertung von Gleichung (6.81) bei isotropem Materialverhalten für die erste Zeile an Knoten  $I$

$$\mathbf{f}_{1I}^e = \int_V \begin{bmatrix} N_{I,x} \mathbb{C}_{11} \\ N_{I,y} \mathbb{C}_{12} \\ N_{I,z} \mathbb{C}_{13} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} dV. \quad (6.83)$$

Die Komponenten von  $\mathbb{C}$  mit zwei Indizes in Gleichung (6.83) ergeben sich aus der Voigt'schen Notation der Materialtangente nach Gleichung (2.40). Ersichtlich wird dabei, dass in dieser Form der Nebenbedingung die Normalspannungen  $\sigma_x$ , welche aus dem linearen Moment entstehen, auf null gesetzt werden. Jedoch entstehen bei Querkontraktionszahlen  $\nu \neq 0$  unphysikalische Dickenspannungen, da hierdurch  $\mathbb{C}_{12} \neq 0$  sowie  $\mathbb{C}_{13} \neq 0$  ist. Um dies zu korrigieren, muss das Vorgehen auch für  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  wiederholt werden. Insgesamt entstehen somit 9 Nebenbedingungen.



# Kapitel 7

## Numerische Umsetzung des gekoppelten Mehrskalenmodells

Die Basis für das gekoppelte Mehrskalenmodell stellt der Algorithmus nach [24] dar. Es wird hierbei zunächst ganz allgemein von zwei Modellen, dem globalen und dem lokalen, gesprochen. Zunächst wird hierfür die schwache Form des Gleichgewichts um die lokalen Anteile erweitert. Dies bedeutet, in Voigt'scher Notation,

$$g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega^M} \delta \mathbf{E}^M \cdot \mathbf{S}^M \, dV + \{\text{Randterme}\} + \sum_{i=1}^{numel \cdot ngp} \frac{1}{\Gamma_i} \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \, dV. \quad (7.1)$$

In Gleichung (7.1) ist das globale Modell enthalten, welches für jeden Integrationspunkt und jedes Element  $i = 1$  bis  $numel \cdot ngp$  zusätzlich ein zu berechnendes lokales Modell erhält. Die Größen des globalen Modells sind mit  $\{\bullet\}^M$  gekennzeichnet. Bei den lokalen wird auf eine gesonderte Kennzeichnung verzichtet. Im Hinblick auf die Homogenisierung wird der Wert  $\Gamma_i$  eingeführt, welcher die Mittelung der resultierenden Größen bewirkt. Beispielsweise ist bei der Homogenisierung des lokalen Modells für ein globales Volumenmodell  $\Gamma_i = V_{RVE}$ , mit  $V_{RVE}$  als Gesamtvolumen des lokalen Modells. Entsprechend ist bei Anwendung auf Balkenelementen  $\Gamma_i = L_{RVE}$ . Wird der Algorithmus hingegen für eine Substrukturberechnung verwendet, so wird die Volumenintegration im lokalen Modell durchgeführt und  $\Gamma_i = 1$  gewählt.

Die Lösung des gekoppelten Problems erfolgt standardmäßig mit dem Newton-

Raphson-Verfahren, d.h. es wird die linearisierte Form

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}), \Delta\mathbf{v}] := g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) + Dg \cdot \Delta\mathbf{v} \quad (7.2)$$

iterativ gelöst. Es ist wichtig anzumerken, dass in der bisherigen Form keine Einschränkung in der Wahl der Elemente getroffen wurde. Durch Einsetzen der FE-Ansätze in Gleichung (7.2) und Summieren über die globalen Elemente ergibt sich

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}), \Delta\mathbf{v}] = \sum_{e=1}^{numel} \left[ \begin{array}{c} \delta\mathbf{v}^M \\ \delta\mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \delta\mathbf{V}_{ngp} \end{array} \right]^T_e \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{k}^M & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ngp} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{v}^M \\ \Delta\mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{V}_{ngp} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{f}^M \\ \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{ngp} \end{array} \right] \right\}_e. \quad (7.3)$$

Das globale Modell besteht folglich aus den Elementen  $e = 1 \dots numel$ , wobei jeder Integrationspunkt ein lokales Modell erhält. Die Kopplung beider Modelle erfolgt über die Ermittlung der benötigten Informationen für die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_e^M$  und des Elementlastvektors  $\mathbf{f}_e^M$ .

## 7.1 Betrachtung des lokalen Modells

Die Kopplung geschieht auf Elementebene des globalen Modells. Hierbei werden entsprechende Werte des Elements auf das lokale Modell übertragen. Schließlich ergeben sich durch einen Vergleich der virtuellen Arbeit und statischer Kondensation die erforderlichen Größen für das globale Modell.

Im Folgenden werden zunächst nur das lokale Modell sowie die übertragenen Größen des globalen betrachtet. Die Freiheitsgrade eines Elements werden in freie  $\mathbf{v}_a$  und in mit Randbedingung versehene  $\mathbf{v}_b$  unterteilt

$$\mathbf{v}_e = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_b \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{a}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_e \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\theta} \end{array} \right]. \quad (7.4)$$

Der Vektor  $\mathbf{V}$  beinhaltet alle Freiheitsgrade des lokalen Modells,  $\boldsymbol{\theta}$  sind die vom globalen Modell übertragenen Größen,  $\mathbf{a}_e$  ist die Koinzidenzmatrix und  $\mathbf{A}_e$  stellt die Übertragung der globalen Größen auf die mit Randbedingungen versehenen

Freiheitsgrade der lokalen Struktur dar. Entsprechend ergeben sich die Variationen und Linearisierungen zu

$$\delta \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_a \\ \delta \mathbf{v}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{V} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_a \\ \Delta \mathbf{v}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Werden weiterhin die Elementsteifigkeitsmatrizen und -lastvektoren genauso unterteilt

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

lässt sich das Gleichungssystem für ein lokales Modell schreiben als

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{V}^T (\mathbf{K} \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}) \\ &= \frac{1}{\Gamma} \sum_{e=1}^{numel2} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{V} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_{aa} \mathbf{a}_e & \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_{ab} \mathbf{A}_e \\ \mathbf{A}_e^T \mathbf{k}_{ba} \mathbf{a}_e & \mathbf{A}_e^T \mathbf{k}_{bb} \mathbf{A}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_e^T \mathbf{f}_a \\ \mathbf{A}_e^T \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{V} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Hierbei ist  $numel2$  die Anzahl der Elemente. Die einzelnen Einträge ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^{numel2} \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_{aa} \mathbf{a}_e & \mathbf{F}_a &= \sum_{e=1}^{numel2} \mathbf{a}_e^T \mathbf{f}_a \\ \mathbf{L} &= \sum_{e=1}^{numel2} \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_{ab} \mathbf{A}_e & \mathbf{F}_b &= \sum_{e=1}^{numel2} \mathbf{A}_e^T \mathbf{f}_b \\ \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{numel2} \mathbf{A}_e^T \mathbf{k}_{bb} \mathbf{A}_e. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Im hieraus resultierenden Gleichungssystem werden die inneren Freiheitsgrade  $\mathbf{V}$  mit

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{K}^{-1} (\mathbf{F}_a + \mathbf{L} \Delta \boldsymbol{\theta}) \quad (7.9)$$

eliminiert. Einsetzen und Auflösen liefert schließlich die Beziehung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma} \{ \delta \boldsymbol{\theta}_i \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{L}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}) \Delta \boldsymbol{\theta}_i + \delta \boldsymbol{\theta}_i \cdot (\mathbf{F}_b - \mathbf{L}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_a) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma} \{ \delta \boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{Q} \Delta \boldsymbol{\theta}_i + \delta \boldsymbol{\theta}_i \cdot \hat{\mathbf{P}} \}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Die Matrix  $\mathbf{Q}$  und der Vektor  $\hat{\mathbf{P}}$  können anhand eines Parametervergleichs mit der globalen Skala identifiziert werden. Es ist noch anzumerken, dass der resultierende Fehlkraftvektor  $\mathbf{F}_a$  verschwindet, sofern die statische Kondensation an einem auskonvergierten, also sich im Gleichgewicht befindlichen, System durchgeführt wird.

Abschließend kann Gleichung (7.11) durch Einsetzen der homogenisierten Werte nach Gleichung (7.10) zu

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}), \Delta\mathbf{v}] = \sum_{e=1}^{numel} \left[ \begin{array}{cccccc} \delta\mathbf{v}^M & \delta\theta_1 & \cdots & \delta\theta_i & \cdots & \delta\theta_{ngp} \end{array} \right]_e \left\{ \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{k}^M(\mathbf{Q}_i) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q}_i & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q}_{ngp} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{v}^M \\ \Delta\theta_1 \\ \vdots \\ \Delta\theta_i \\ \vdots \\ \Delta\theta_{ngp} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{f}^M(\hat{\mathbf{P}}_i) \\ \hat{\mathbf{P}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{P}}_i \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{P}}_{ngp} \end{array} \right] \right\}_e. \quad (7.11)$$

umgeformt werden. Dabei wird in Gleichung (7.11) die Kopplung zwischen den beiden Skalen deutlich. Zum einen hängen die Gleichungssysteme der lokalen Skalen von den übertragenen Größen  $\theta$  ab. Zum anderen werden die homogenisierten Größen  $\mathbf{Q}$  und  $\hat{\mathbf{P}}$  benötigt, um die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^M$  aufzustellen. Dadurch sind die lokalen Modelle nur von der globalen Skala abhängig und untereinander vollständig unabhängig.

## 7.2 Anwendungsfall Substrukturmodellierung

Der vorgestellte Algorithmus ermöglicht nicht nur die im Fokus stehende Homogenisierung, sondern auch die Substrukturmodellierung [43]. Hierbei reduziert sich Gleichung (7.3) auf

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}), \Delta\mathbf{v}] = \sum_{e=1}^{numel} \left[ \begin{array}{c} \delta\mathbf{v}^M \\ \delta\mathbf{V}_1 \end{array} \right]_e^T \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{k}^M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{v}^M \\ \Delta\mathbf{V}_1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{f}^M \\ \mathbf{F}_1 \end{array} \right] \right\}_e. \quad (7.12)$$



Dies bedeutet, dass jedem Element genau eine Substruktur zugeordnet wird. Die Kopplung geschieht dabei durch direkte Übertragung der Knotenfreiheitsgrade. Folglich ist

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{v}^M. \quad (7.13)$$

Wesentlich dabei ist, dass die Integration über die Substruktur durchgeführt wird, welche somit alle geometrischen Informationen beinhaltet. Im Vergleich mit Gleichung (7.3) reduziert sich dadurch die Anzahl der Integrationspunkte der Elemente auf der globalen Skala zu  $ngp = 1$ , was in Gleichung (7.12) berücksichtigt ist. Der Vergleich zwischen den beiden Skalen liefert

$$\delta \mathbf{v}^M \cdot \{ \mathbf{k}^M \Delta \mathbf{v}^M + \mathbf{f}^M \}_e = \frac{1}{\Gamma} \{ \delta \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Q} \Delta \boldsymbol{\theta} + \delta \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P} \}. \quad (7.14)$$

Einsetzen des kinematischen Zusammenhangs, Gleichung (7.13), der beiden Skalen und setzen von  $\Gamma = 1$  ergibt schließlich

$$\mathbf{k}^M = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{f}^M = \hat{\mathbf{P}}. \quad (7.15)$$

Die bisherigen Zusammenhänge sind ganz allgemein formuliert und können somit für beliebige Substrukturen verwendet werden.

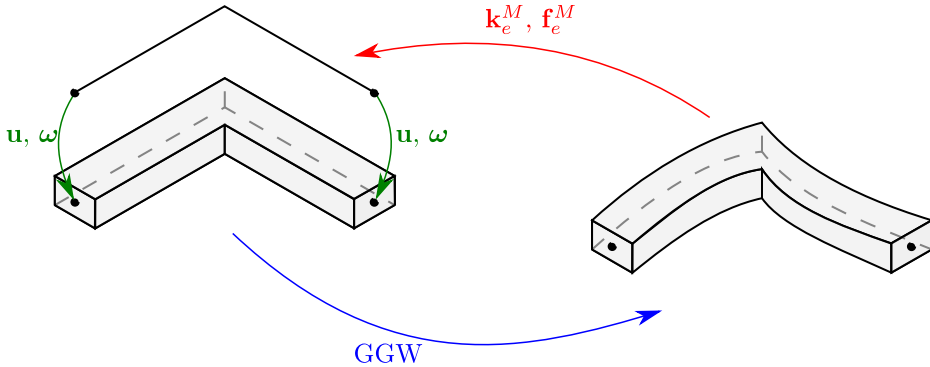


Abbildung 7.1: Ablauf der Mehrskalenmodellierung – Substrukturmodellierung mit Balkenkinematik

Hinsichtlich balkenartiger Strukturen kann nun für  $\boldsymbol{\theta}_e^M$  eines Elements der übergeordneten Skala die Balkenkinematik angenommen werden. Folglich lässt sich mittels der Verschiebung der Referenzachse  $\mathbf{u}_I$  und des axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega}_I$  der Knoten  $I$  des Elements ausdrücken. Diese Werte werden an die zugeordneten Knoten auf der Substruktur übertragen, siehe Abb. 7.1. Anschließend wird die Substruktur

iterativ berechnet und die kondensierten Werte an das Element auf der übergeordneten Skala übergeben.

Für die Übertragung der Balkenkinematik auf die Substruktur können verschiedene Annahmen getroffen werden. Im dargestellten Fall wird die direkte Relation der Verschiebungen über das Interfacelement aus Abschnitt 6.3 erreicht.

### 7.3 Anwendungsfall Homogenisierung

Bei der Homogenisierung ist das Vorgehen nahezu identisch zur Substrukturmodellierung. Allerdings werden hierbei nicht die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementlastvektor, sondern die Materialtangente und die Spannungen für das Element der globalen Skala gewonnen. Dies bedeutet, dass die Geometrieintegration auf der globalen Skala stattfinden muss. Somit werden für Elemente im Allgemeinen mehrere Integrationspunkte erforderlich und das zu lösende Gleichungssystem behält die Form von Gleichung (7.3) bei. Zur Identifikation der gekoppelten Größen ist es sinnvoll, die linearisierte Form des schwachen Gleichgewichts unter Vernachlässigung der Randterme

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}), \Delta\mathbf{v}] = \int_{\Omega^M} \delta\mathbf{E}^M \cdot \mathbf{S}^M dV + \int_{\Omega^M} \delta\mathbf{E}^M \cdot \mathbf{D}^M \Delta\mathbf{E}^M + \Delta\delta\mathbf{E}^M \cdot \mathbf{S}^M dV \\ + \sum_{i=1}^{numel \cdot ngp} \left\{ \frac{1}{\Gamma_i} \int_{\Omega_i} \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \Delta\mathbf{E} + \Delta\delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \right\} dV = 0 \quad (7.16)$$

zu betrachten. Die benötigten homogenisierten Größen sind dabei die Materialtangente  $\mathbf{D}^M$  und die Spannungen  $\mathbf{S}^M$ , welche aus den lokalen Modellen für jeden Integrationspunkt gewonnen werden müssen. Um dies zu erreichen muss folglich

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}^M \quad (7.17)$$

gewählt werden. Durch diese Wahl ergibt sich beim Vergleich der beiden Skalen

$$\delta\mathbf{E}^M \cdot \{\mathbf{D}^M \Delta\mathbf{E}^M + \mathbf{S}^M\}_e = \frac{1}{\Gamma_i} \left\{ \delta\boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{Q} \Delta\boldsymbol{\theta}_i + \delta\boldsymbol{\theta}_i \cdot \hat{\mathbf{P}} \right\}. \quad (7.18)$$

Hieraus lassen sich die benötigten globalen Werte ablesen

$$\mathbb{C}^M = \frac{1}{\Gamma} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{S}^M = \frac{1}{\Gamma} \hat{\mathbf{P}}. \quad (7.19)$$

### 7.3.1 Beziehung zwischen Verschiebungen und Verzerrungen

Die Relation der Balkenverzerrungen zu den Verschiebungen auf dem RVE erfolgt entsprechend Kapitel 5. Es ist nochmal wichtig anzumerken, dass hierbei die Einschränkung auf anfänglich gerade und unverwundene Balken sowie kleine Verzerrungen getroffen wird. Unter diesen Annahmen sind die Green-Lagrange'schen Verzerrungen der Balkenkinematik, Gleichung (3.14), proportional zum angenommenen Deformationsgradienten, Gleichung (5.7). Entsprechend gilt unter diesen Voraussetzungen  $\mathbf{S} \approx \mathbf{P}$ .

Für die Relation nach Gleichung (7.5) wird die Matrix  $\mathbf{A}_e$  entsprechend Gleichung (5.11) gewählt. Dies bedeutet

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \hat{x} & 0 & 0 & 0 & \hat{x}z & -\hat{x}y \\ 0 & \hat{x} & 0 & -\hat{x}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{x} & \hat{x}y & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Wichtig ist, dass die Koordinate  $\hat{x}$  zum Vektor  $\mathbf{X}$  der deformierten Geometrie  $\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X}$  gehört, während die  $y$ - und  $z$ -Koordinaten dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  zugeordnet sind. Diese Unterscheidung ist bei periodischen Randbedingungen auf Grund von  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- + \mathbf{F}(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-)$  essentiell, da in diesem Fall  $\hat{x} = L_{RVE}$ , also der Länge des RVEs entspricht.

Der Ablauf des Verfahrens ist schematisch in Abb. 7.2 dargestellt. Dabei werden die Balkenverzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  vom Balken auf das RVE übertragen (grün). Danach wird das Modell berechnet und der Gleichgewichtszustand erreicht (blau). Die abschließende Homogenisierung liefert die zugehörigen Schnittgrößen  $\boldsymbol{\sigma}$  und ihre Linearisierungen  $\mathbf{D}$ , welche an das Balkenelement übertragen werden (rot). Hieraus folgt im Vergleich mit Gleichung (7.19)

$$\mathbf{D}^M = \frac{1}{\Gamma} \mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\sigma}^M = \frac{1}{\Gamma} \hat{\mathbf{P}}. \quad (7.21)$$

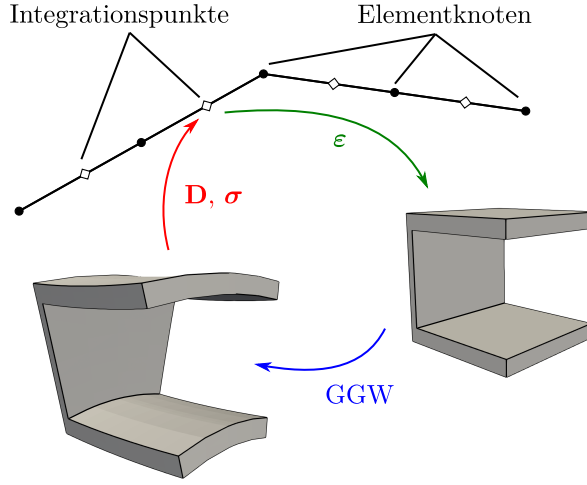


Abbildung 7.2: Ablauf der Mehrskalenmodellierung – Homogenisierung für Balkenelemente.

### 7.3.2 Übertragung der Verzerrungen auf das RVE

Ausgehend vom zu lösenden Gleichungssystem auf der lokalen Skala

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

ist die Aufbringung der Verzerrungen im Falle von Verschiebungsrandbedingungen eindeutig. Diese werden über die mit Randbedingungen versehenen Freiheitsgrade  $\mathbf{u}_b$  aufgebracht. Dies bedeutet, dass im ersten Iterationsschritt des Newton-Raphson-Verfahrens

$$\mathbf{K}_{aa} \Delta \mathbf{u}_a^n = \mathbf{f}_a - \mathbf{K}_{ab} \Delta \mathbf{u}_b^n = \mathbf{f}_a - \mathbf{K}_{ab} (\mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^k - \mathbf{u}_b^{n-1}) \quad (7.23)$$

gelöst werden muss. Dabei sind  $\mathbf{u}_b^{n-1}$  die Verschiebungswerte der gehaltenen Knoten aus dem letzten auskonvergierten Zustand. Die Werte  $\boldsymbol{\theta}^k$  sind die aktuellen makroskopischen Verzerrungen, welche während der lokalen Iterationen konstant bleiben und  $\Delta \mathbf{u}_a^n$  das Verschiebungssinkrement in der ersten lokalen Newton-Raphson-Iteration. Nach der ersten Iteration wird  $\mathbf{u}_b^n = \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}$  und  $\mathbf{u}_a^n = \mathbf{u}_a^{n-1} + \Delta \mathbf{u}_a^n$  gesetzt. Anschließend kann das Modell wie gewohnt ohne Modifikation der rechten Seite ausiteriert werden.

Für die periodischen Randbedingungen ist es zweckmäßig das Ausgangsgleichungssystem wie folgt zu schreiben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Darin sind die Freiheitsgrade in freie  $\mathbf{u}_a$ ,  $\mathbf{u}_b$  und gehaltene  $\mathbf{u}_c$  unterteilt. Die Periodizität wird über das Master-Slave-Konzept umgesetzt. Dies bedeutet, dass  $\Delta \mathbf{u}_b = \Delta \mathbf{u}_c$  ist. Das zu lösende Gleichungssystem nimmt die Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} + \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ba} + \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{bb} + \mathbf{K}_{cc} + \mathbf{K}_{cb} + \mathbf{K}_{bc} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \mathbf{u}_{b/c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_c \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

an. Eine Modifikation der rechten Seite wie in Gleichung (7.23) lässt sich nicht so einfach umsetzen. Daher werden, ausgehend von der Nebenbedingung  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- + \mathbf{F}(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-)$ , die Verschiebungen auf dem Rand mit

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- + (\mathbf{F} - \mathbf{1})(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \quad (7.26)$$

vorgegeben. Mit Bezug zu Gleichung (7.24) ist  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}^-$  und  $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}^+$ .

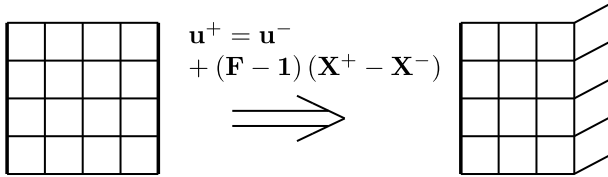


Abbildung 7.3: Verzerrungsvorgabe für ersten Iterationsschritt am Beispiel der Schubdeformation eines RVEs unter Annahmen der Balkenkinematik – Mit Netz und stark verzerrten Elementen am Rand.

Für den ersten Iterationsschritt mit Verschiebungsvorgabe nach Gleichung (7.26) ist die Ausgangsgeometrie (links) in Abb. 7.3 und mit aufgebrachtener Deformation (rechts) dargestellt. Deutlich erkennbar sind die stark deformierten Elemente am rechten Rand des Netzes. Dies führt dazu, dass die Konfiguration vor dem ersten Iterationsschritt sehr weit von der auskonvergierten Lösung entfernt ist. Dies hat einen negativen Einfluss auf die Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens. Ein Zustand, der näher an der auskonvergierten Lösung liegt, kann erreicht werden,

indem alle Verschiebungen mit dem Inkrement der Deformationsgradienten vor dem ersten Iterationsschritt modifiziert werden. Dies führt auf

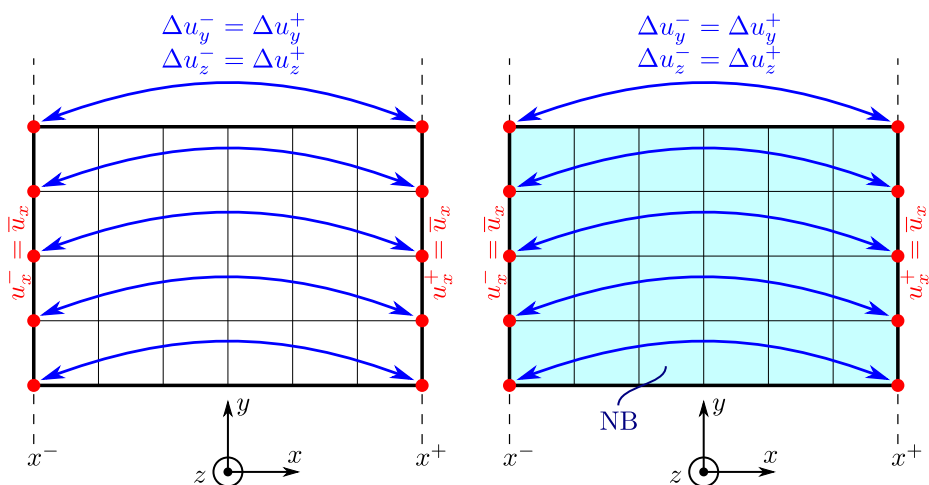
$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1} + \Delta \mathbf{F} \mathbf{X}. \quad (7.27)$$

Um numerische Ungenauigkeiten durch das additive Update mit den Inkrementen des Deformationsgradienten zu vermeiden, wird die Randverschiebungsvorgabe nach Gleichung (7.26) beibehalten.

# Kapitel 8

## Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird der vorgestellte Mehrskalenansatz für Balkenelemente an geeigneten Beispielen getestet. Im Speziellen wird auf die Verbesserung der Ergebnisse durch die neuen Rand- und Nebenbedingungen eingegangen. Hierzu werden verschiedene RVE-Randbedingungen untersucht. Zu ihnen gehören die Verschiebungsrandbedingungen sowie die periodischen Randbedingungen.



- (a) DBC: Lineare Verschiebungsrandbedingungen –  $u_x$  an beiden Seiten fest vorgegeben, Inkrement von  $u_y$  und  $u_z$  gleichgesetzt.
- (b) DBCC: DBC mit Nebenbedingung – Randbedingungen wie DBC, zusätzlich Nebenbedingung NB nach Abschnitt 6.5 im gesamten Gebiet.

Abbildung 8.1: RVE – FE-Netz mit Verschiebungsrandbedingungen.

Zur Veranschaulichung der gewählten Randbedingungen sind zunächst die Verschiebungsrandbedingungen in Abb. 8.1 grafisch dargestellt. Bei ihnen wird allerdings nur die Normalenkomponente  $u_x$  der Verschiebungen auf den Rändern  $x^-$  und  $x^+$  vorgegeben. Für die übrigen Richtungen geschieht dies durch Gleichsetzen der Zuwächse der Verschiebungen. Dies hat zur Folge, dass das RVE und somit auch der Querschnitt bei Querkontraktionszahlen  $\nu \neq 0$  kontrahieren können. Hierdurch reduzieren sich auftretende Randeffekte aus der Verschiebungsvorgabe erheblich.

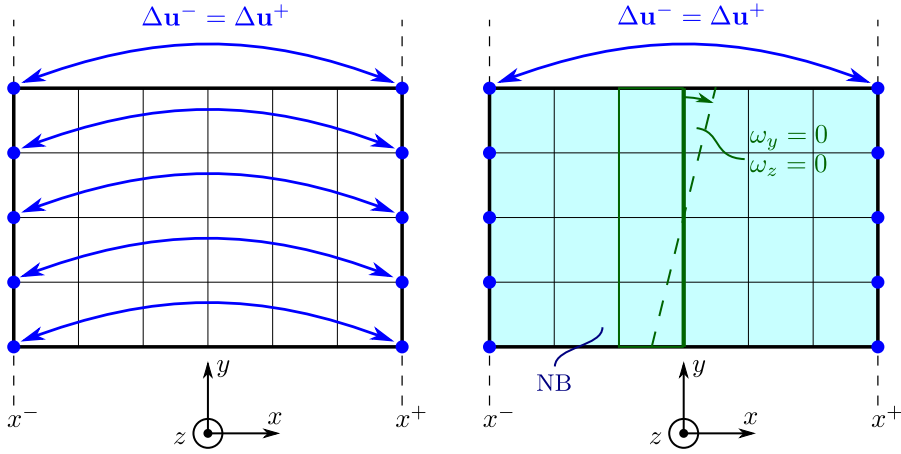
Die Verschiebungsrandbedingungen (DBC) in Abb. 8.1a dienen in erster Linie zum Vergleich, da bei ihnen die Längenabhängigkeit der resultierenden Schubsteifigkeit noch vorhanden ist. Eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse wird durch die zusätzliche Nebenbedingung, mit dem in Abschnitt 6.5 vorgestellten Element, erreicht. Dies führt zu den in Abb. 8.1b dargestellten Randbedingungen DBCC. Eine Längenabhängigkeit der Schubsteifigkeiten bei in Längsrichtung homogenen RVEs ist hier zwar auch gegeben, allerdings konvergieren die Ergebnisse mit zunehmender Länge des RVEs gegen die aus der Literatur bekannten Werte.

Der zweite Typ an Randbedingungen sind die periodischen (PBC) nach Abb. 8.2. Ihre Ausgangsbasis ist in Abb. 8.2a dargestellt. Dabei ist anzumerken, dass hierbei eine Schubdeformation zu einer reinen Starrkörperrotation führt, siehe Abschnitt 5.3.1. Dies hat zur Folge, dass die homogenisierte Schubsteifigkeit den Wert null annimmt. Somit können diese Randbedingungen zwar verwendet werden, um die übrigen Querschnittswerte zu bestimmen, allerdings nur, sofern keine Rückkopplung mit der Schubsteifigkeit existiert. Für eine gekoppelte Berechnung sind sie aufgrund der singulären Materialtangente (verschwindende Schubterme) ungeeignet.

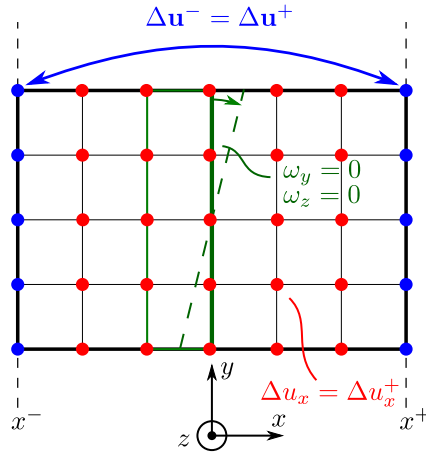
Die Variante der periodischen Randbedingungen (PBCC) in Abb. 8.2b nutzt zur Vermeidung der Starrkörperrotation das in Abschnitt 6.4 vorgestellte Interfaceelement. Um die Längenunabhängigkeit der homogenisierten Schubsteifigkeiten zu erreichen, wird zudem die Nebenbedingung mit dem Element aus Abschnitt 6.5 im gesamten Gebiet aufgebracht. Hierdurch kann sich der Querschnitt an den Enden des RVEs periodisch deformieren und der lineare Zusammenhang zwischen der Schubdeformation und der Relativverschiebung der beiden Enden des RVEs wird erreicht.

Die letzte Variante periodischer Randbedingungen (PBCL) ist in Abb. 8.2c dargestellt. Analog zu den PBCC wird die Starrkörperrotation durch das Interfaceele-





- (a) PBC: Periodische Randbedingungen – (b) PBCC: PBC mit Nebenbedingung und Inkremente von  $\mathbf{u}$  auf positivem und negativem Rand gleichgesetzt. Rotation um  $y$ - sowie  $z$ -Achse verhindert – NB wie DBCC und Rotation mit Interface nach Abschnitt 6.4 verhindert.



- (c) PBCL: PBC mit  $\Delta u_x$  im gesamten Gebiet mit denjenigen der positiven Seite gleichgesetzt und Rotation um  $y$ - sowie  $z$ -Achse verhindert – Wie PBCC aber Nebenbedingung durch Gleichsetzen der Verschiebungsincremente Längsrichtung ersetzt.

Abbildung 8.2: RVE – FE-Netz mit periodischen Randbedingungen.

ment aus Abschnitt 6.4 verhindert. Um die Längenunabhängigkeit der Ergebnisse zu gewährleisten wird angenommen, dass die Verwölbungen des Querschnitts konstant über die gesamte Länge des RVEs sind. Dies führt zu einem fest vorgegebenen

$\varepsilon_x$ . Somit kann sich eine lineare Momentenverteilung in Längsrichtung des RVEs nicht einstellen. Diese Nebenbedingung wird durch Gleichsetzen der Verschiebungsinkremente in Längsrichtung  $\Delta u_x$  erreicht und erfordert dadurch ein regelmäßiges Netz. Dies führt entsprechend zu einer eingeschränkten Verwendbarkeit dieser Randbedingungen.

Für die Modellierung der RVEs werden ausschließlich quadratische Elemente verwendet. Dies führt dazu, dass bereits bei sehr groben Netzen nur noch ein kleiner Fehler in den homogenisierten Querschnittswerten vorhanden ist. Weiterhin werden die verbleibenden Starrkörpermoden mit Hilfe des Interfacelements aus Abschnitt 6.3 behindert. Im Gegensatz dazu werden für die Balkenelemente lineare Ansatzfunktionen gewählt. Da es sich beim Balkenelement um ein reines Verschiebungselement handelt, wird dieses unterintegriert, um Schublocking zu vermeiden. Die bedeutet, dass für die erwähnten linearen Ansatzfunktionen eine Ein-Punkt-Integration durchgeführt wird. Bei quadratischen Elementen werden hingegen zwei Integrationspunkte verwendet.

## 8.1 Rechteckquerschnitt

In einem ersten Schritt wird einer der einfachsten Querschnitte, der Rechteckquerschnitt, betrachtet. Seine Querschnittswerte sind im linear elastischen Fall allgemein bekannt. Die Geometrien des Querschnitts sowie des RVEs sind in Abb. 8.3

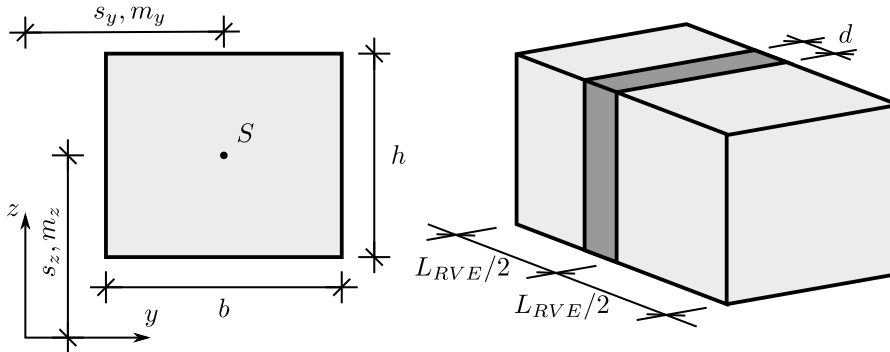


Abbildung 8.3: Querschnittsgeometrie links und RVE-Geometrie rechts.

gegeben. Dabei sind  $b$  und  $h$  die Breite und Höhe des Querschnitts, respektive

des RVEs. Letzteres besitzt zudem die Länge  $L_{RVE}$ . Des Weiteren bezeichnen  $s_y$ ,  $m_y$  den Abstand des Schwer- sowie Schubmittelpunkts zur Referenzachse in  $y$ -Richtung, respektive  $s_z$ ,  $m_z$  in  $z$ -Richtung. Der Parameter  $d$  gibt die gewählte Dicke des 3D-Interfaces an.

### 8.1.1 Effektive Querschnittswerte – Lineare Elastizität

#### Zentrischer Querschnitt

Zunächst werden die effektiven Querschnittswerte anhand des St. Venant-Kirchhoff-Stoffgesetzes berechnet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Referenzachse des Balkens durch den Schwerpunkt des Querschnitts verläuft ( $s_y = m_y = s_z = m_z = 0$  cm). Als Querschnittsabmessungen werden  $b = h = 1$  cm gewählt. Die Materialparameter sind diejenigen von Stahl mit einem E-Modul von  $E = 21\,000$  kN cm<sup>-2</sup> und einer Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$ .

Um zu zeigen, dass die Ergebnisse unabhängig von der gewählten Länge  $L_{RVE}$  des RVEs sind, wird diese entsprechend variiert. Durch die gegebene Geometriewahl reduzieren sich die zu untersuchenden Querschnittswerte auf die Dehnsteifigkeit  $EA$ , die Schubsteifigkeit  $GA_{S_y} = GA_{S_z}$ , die Biegesteifigkeit  $EI_y = EI_z$  und die Torsionssteifigkeit  $GI_T$ .

Der Querschnitt wird mit 4x4 Elementen modelliert, während in Längsrichtung 8 Elemente für die Verschiebungsrandbedingungen und 9 Elemente für die periodischen Randbedingungen gewählt werden. Die zusätzlichen Elemente bei den periodischen Randbedingungen sind die Folge des 3D-Interfaceelements nach Abschnitt 6.4, welches die Starrkörperrotationen der Schubdeformationen verhindert.

$EA$	$GA_S$	$EI$	$GI_T$
21 000 kN	6730 kN	1750 kN cm <sup>2</sup>	1130 kN cm <sup>2</sup>

Tabelle 8.1: Effektive Querschnittswerte des Rechteckquerschnitts.

Für einen Vergleich sind die effektiven Querschnittswerte in Tabelle 8.1 angegeben. Bei der Schubsteifigkeit wird hierfür ein Schubkorrekturfaktor von  $\kappa = 5/6$

berücksichtigt.

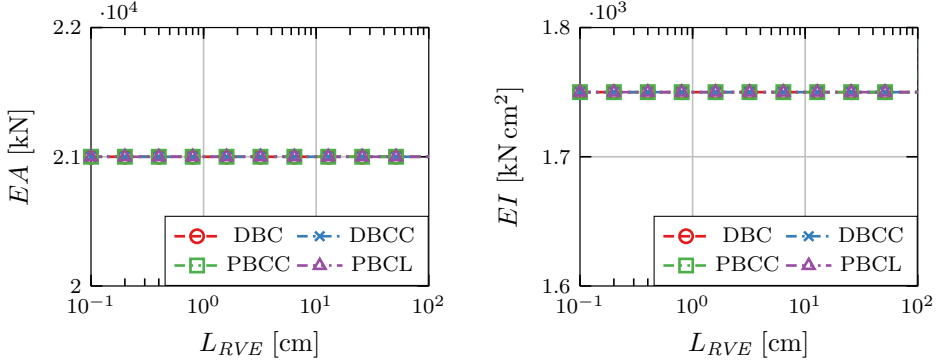


Abbildung 8.4: Konvergenzverhalten von  $EA$  und  $EI$  bei zunehmender RVE-Länge – Rechteckquerschnitt.

Abbildung 8.4 stellt die Ergebnisse für die Dehn- und Biegesteifigkeit über die Länge  $L_{RVE}$  des RVEs dar. Deutlich erkennbar ist, dass alle Randbedingungen die gleichen Ergebnisse liefern. Eine Abhängigkeit von der Länge des RVEs kann hier nicht festgestellt werden. Die resultierenden Werte aus der Homogenisierung entsprechen den bekannten Werten aus Tabelle 8.1.

Die Ergebnisse für die Schub- und Torsionssteifigkeit zeigen bei der Wahl der Verschiebungsrandbedingungen DBC und DBCC eindeutig eine Abhängigkeit von der Länge des RVEs, siehe Abb. 8.5. Werden zunächst die DBC betrachtet, so ist festzustellen, dass die homogenisierte Torsionssteifigkeit mit zunehmender Länge des RVEs gegen die richtige Lösung konvergiert. Dies wird in guter Näherung ab einer Länge des RVEs von  $L_{RVE} = 6.4$  cm erreicht. Ab dieser Länge sind die Randeffekte infolge Wölbbehinderung abgeklungen. Die Ergebnisse für die Schubsteifigkeit hingegen konvergieren mit zunehmender Länge des RVEs gegen null. Selbst bei einer Länge von  $L_{RVE} = 6.4$  cm, bei der die Torsionssteifigkeit nahezu auskonvergiert ist, erreicht die Schubsteifigkeit nur noch 7% des Referenzwerts. Diese Randbedingungen liefern somit, zumindest für die Schubsteifigkeiten, keine brauchbaren Ergebnisse. Hingegen ist bei der verbesserten Variante DBCC zu erkennen, dass die Ergebnisse mit zunehmender Länge gegen die Referenzwerte, sowohl für die Schub- als auch die Torsionssteifigkeit, konvergieren. Ab einer Länge von  $L_{RVE} = 12.8$  cm wird eine Schubsteifigkeit von  $GA_S = 6763$  kN erreicht. Dies entspricht einem Schubkorrekturfaktor von  $\varkappa = 0.8373$ , welcher in etwa dem bekannten Wert  $5/6$  für den gewählten Querschnitt entspricht. Die resultierende

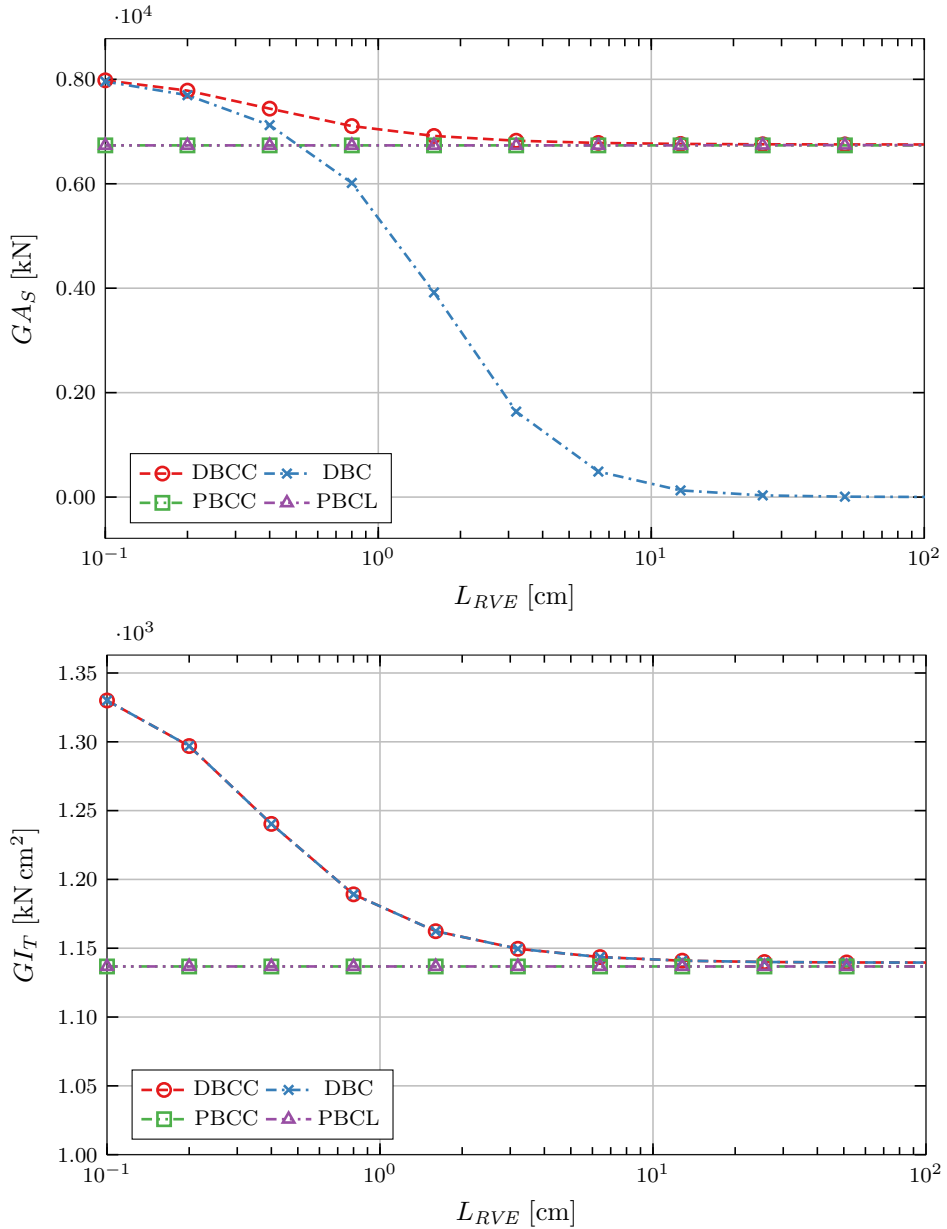


Abbildung 8.5: Konvergenzverhalten von  $GA_S$  und  $GI_T$  bei zunehmender RVE-Länge – Rechteckquerschnitt.

Torsionssteifigkeit entspricht derjenigen der DBC. Aus den Diagrammen wird ersichtlich, dass die Nebenbedingung die resultierende Schubsteifigkeit korrigiert und keinen Einfluss auf die übrigen Werte hat.

Die optimalen Randbedingungen stellen die periodischen Randbedingungen PBCC und PBCL dar. Da bei ihnen die Verwölbung des Querschnitts nicht behindert wird, entstehen durch sie keine Randeffekte. Dadurch ergeben sich die korrekten Querschnittswerte unabhängig von der Länge des RVEs.

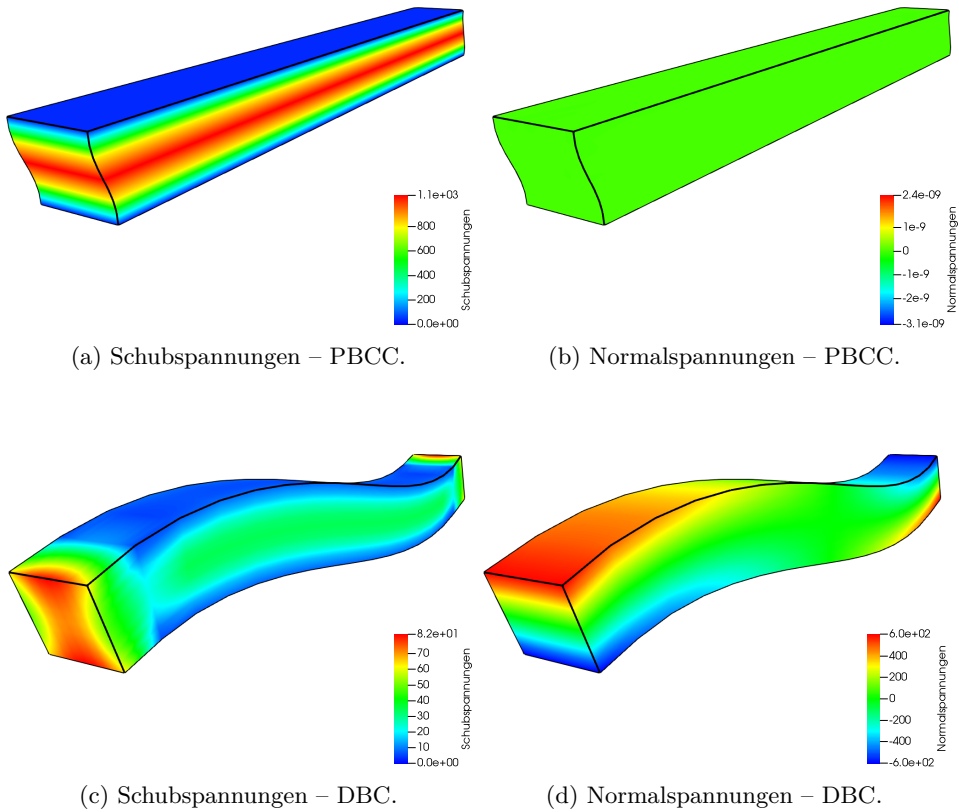


Abbildung 8.6: Schubdeformation und Spannungen in  $[\text{kN cm}^{-2}]$  des RVEs – Rechteckquerschnitt.

Die Auswirkungen der Nebenbedingung sind in Abb. 8.6, anhand einer reinen Schubdeformation des RVEs, dargestellt. In Abb. 8.6a sind die sich einstellenden Schubspannungen am deformierten RVE mit den PBCC zu sehen. Deutlich erkenn-

bar ist die Verwölbung des Querschnitts. Bei Betrachtung der Schubspannungen ist zu erkennen, dass weiterhin die Spannungsrandbedingungen an Ober- und Unterseite eingehalten sind. Die sich bei diesen Randbedingungen einstellenden Normalspannungen sind in Abb. 8.6b abgebildet. Diese verschwinden im gesamten RVE. Somit wird infolge einer Schubdeformation ein reiner Schubspannungszustand erreicht. Weiterhin ist zu erkennen, dass, aufgrund der fehlenden Normalspannung, das RVE in Längsrichtung gerade bleibt. Dadurch ist der lineare Verschiebungszusammenhang mit der Scherung  $u_y = x \cdot \gamma_y$ , bzw. analog für die  $z$ -Richtung, sichergestellt. Hingegen stellen sich bei DBC unter Schubdeformation die in Abb. 8.6d dargestellten Normalspannungen ein. Dies hat zur Folge, dass der lineare Zusammenhang zwischen Scherung und Deformation nicht mehr gegeben ist. Zudem wird in Abb. 8.6c der Einfluss der Wölbbehinderung auf die Schubspannungen deutlich, welcher die Ursache der Längenabhängigkeit von den DBCC ist.

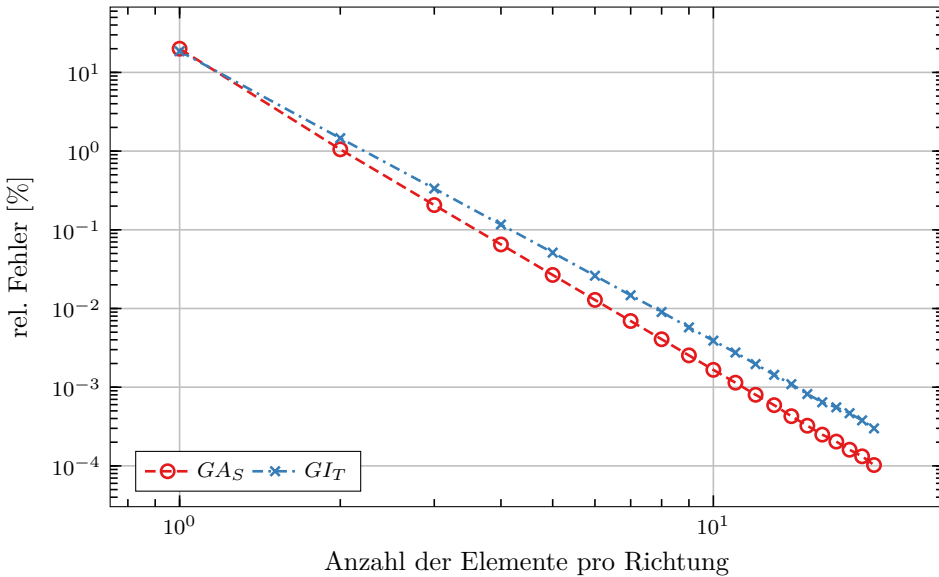


Abbildung 8.7: Netzkonvergenz für PBCC – Regelmäßige Netzverfeinerung des Querschnitts bei konstanter Anzahl der Elemente in Längsrichtung.

Abschließend wird die Netzkonvergenz für die PBCC untersucht. Es ist anzumerken, dass eine Netzverfeinerung in Längsrichtung keine Auswirkungen auf das Ergebnis hat. Zudem liefern PBCC und PBCL die identischen Ergebnisse. Aufgrund der Längenabhängigkeit der DBC werden auch diese nicht berücksichtigt. Der Querschnitt wird dabei in Breiten- sowie Höhenrichtung gleichmäßig vernetzt. Schon

bei einer Vernetzung von nur einem Element über den Querschnitt resultieren die richtigen Dehn- und Biegesteifigkeit. Untersucht werden daher nur die Fehler der Schub- und Torsionssteifigkeiten. Der Referenzwert für  $GI_T = 1135.4297 \text{ kN cm}^2$  wird mit dem Element aus [26] ermittelt. Hingegen wird für die Schubsteifigkeit als Referenz ein Schubkorrekturfaktor von  $\kappa = 5/6$  angenommen.

Das Ergebnis der Netzkonvergenzstudie ist in Abb. 8.7 dargestellt. Deutlich erkennbar ist, dass die Werte gegen die Referenzwerte konvergieren. Mit bereits  $4 \times 4$  Elementen über den Querschnitt fällt der relative Fehler auf unter 0.1 % mit den resultierenden Werten von  $\kappa = 0.83388$  und  $GI_T = 1136.754 \text{ kN cm}^2$ . Diese Werte sind bereits ausreichend genau für numerische Berechnungen.

### Exzentrischer Querschnitt

Als Nächstes wird der Fall eines exzentrischen Querschnitts betrachtet. Hierfür wird  $s_y = m_y = 1 \text{ cm}$  und  $s_z = m_z = 0 \text{ cm}$  gewählt. Die Breite und Höhe des Querschnitts werden beibehalten. Als Netz wird wieder das ursprüngliche mit  $4 \times 4$  Elementen im Querschnitt und 8 Elementen in Längsrichtung bei DBC bzw. 9 in Längsrichtung bei PBCC gewählt.

Im Vordergrund steht an dieser Stelle die Torsionssteifigkeit, da sie nach Gleichung (3.33) zusätzlich von den Schubsteifigkeiten und der Position des Schubmittelpunkts abhängt. Die Ergebnisse sind für die DBC und PBCC mit veränderlicher Länge  $L_{RVE}$  in Abb. 8.8 dargestellt. Zum Vergleich sind noch die Torsionssteifigkeit  $GI_T = 1135.4297 \text{ kN cm}^2$  und der Wert infolge Exzentrizität  $G(I_T + m_y^2 A_S) = 7871.908 \text{ kN cm}^2$  mit abgebildet. Zu erkennen ist, dass die PBCC weiterhin längenunabhängige Ergebnisse liefern und zu den Ergebnissen nach Gleichung (3.33) führen. Die DBC hingegen weisen wieder die Längenabhängigkeit auf. Mit zunehmender Länge konvergieren ihre Werte gegen die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit, welche sich auf den Schubmittelpunkt des Querschnitts bezieht. Der Grund für dieses Verhalten der DBC ist, dass mit zunehmender Länge des RVEs die homogenisierte Schubsteifigkeit auf null abfällt. Somit sind in diesem Fall die resultierenden Schubflächen  $A_S = 0 \text{ cm}^2$  und das Ergebnis der Torsionssteifigkeit falsch.



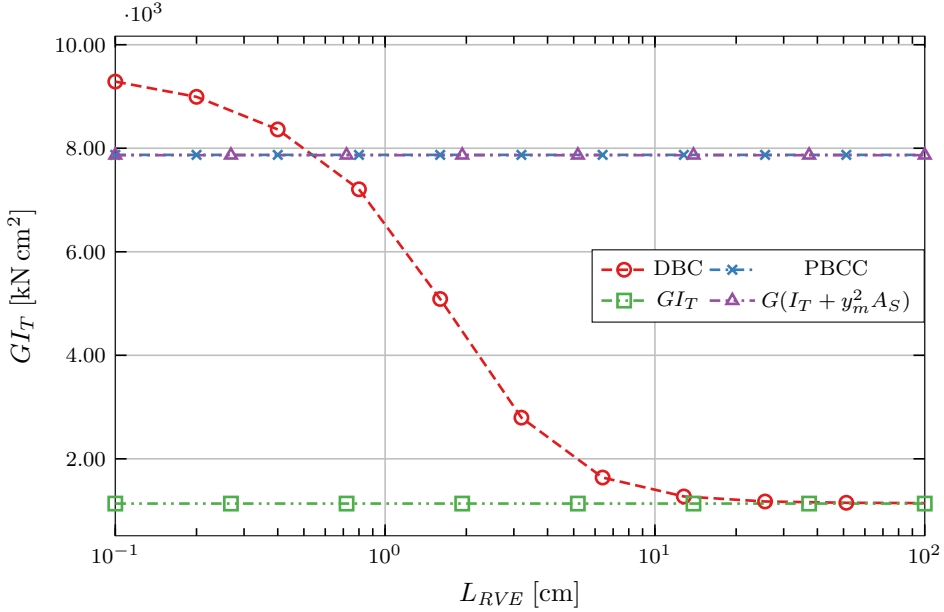


Abbildung 8.8: Resultierende Torsionssteifigkeit bei einer Exzentrizität  $s_y = m_y = 1$  cm.

### 8.1.2 Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität – Plastizität

Um zu überprüfen, ob die physikalische Nichtlinearität entsprechend berücksichtigt werden kann, wird in diesem Abschnitt die Plastizität nach von Mises als Materialverhalten angenommen.

#### Kragarm

Als ein biegedominiertes Problem dient der Kragarm aus [46, 74]. Der Rechteckquerschnitt hat eine Breite von  $b = 2$  und eine Höhe von  $h = 1$ . Zudem verläuft die Balkenreferenzachse durch den Schwerpunkt. Dies bedeutet, dass  $s_y = m_y = s_z = m_z = 0$  sind. Die Länge des Kragarms beträgt  $L = 20$ . Hieraus resultiert ein Verhältnis  $L/h = 20$ . Genauso wie die Geometrieparameter sind auch die Materialparameter einheitenlos angegeben. Für den Elastizitätsmodul, die Querkontraktionszahl, die Streckgrenze und den Verfestigungsmodul werden die Parameter  $E = 16\,000$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $Y_0 = 20$  und  $H = 200$  gewählt. Auf beiden Skalen wird zudem

geometrische Nichtlinearität vorausgesetzt.

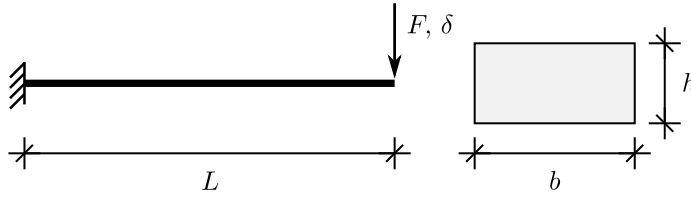


Abbildung 8.9: Geometrie Kragarm und Querschnitt.

Die Geometrien des Systems und des Querschnitts sind in Abb. 8.9 dargestellt. Für das gekoppelte System werden 20 lineare Balkenelemente verwendet. Das RVE wird dabei mit 8 Elementen über die Breite  $b$  und 4 über die Höhe  $h$  vernetzt. Für die PBCC werden 3 Elemente und für die DBC 8 in Längsrichtung verwendet. Die Länge des RVEs wird sowohl für PBCC als auch für DBC zu  $L_{RVE} = 1$  gewählt.

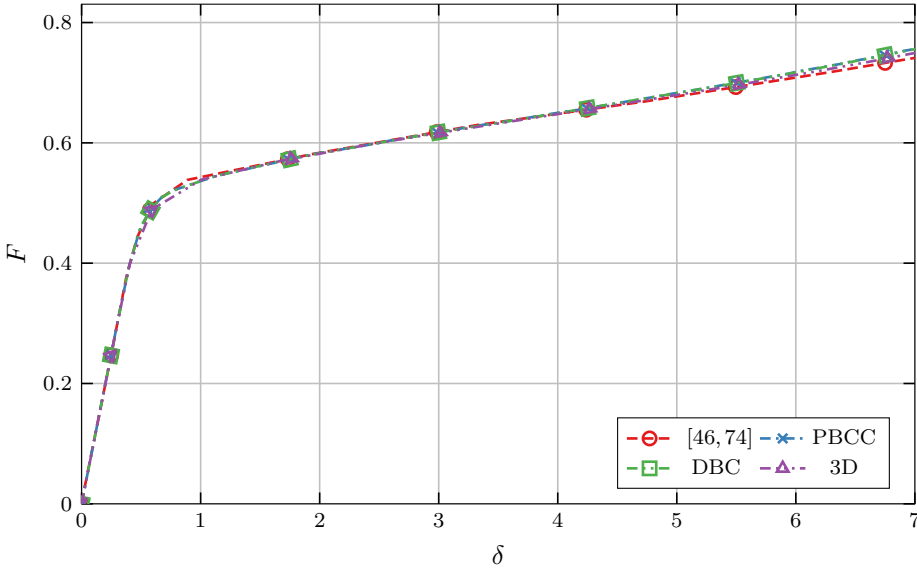


Abbildung 8.10: Angreifende Kraft  $F$  über die Absenkung  $\delta$  – Systemlänge  $L = 20$ .

Die Ergebnisse der Berechnung sind im Vergleich mit denjenigen der Quellen in Abb. 8.10 dargestellt. Da das System durch das große Verhältnis  $L/h = 20$  ein biegedominiertes ist, liefern die Berechnungen mit PBCC sowie DBC dieselben Ergebnisse.

In einem nächsten Schritt wird das System auf eine Länge  $L = 6$  verkürzt. Bezüglich

der Belastungsrichtung ergibt sich hierdurch ein Verhältnis von  $L/h = 6$ . Diese Änderung des Systems hat zur Folge, dass nicht nur die Biegedeformation, sondern auch die Schubdeformation eine Rolle spielen.

Zur Berechnung der Referenzlösungen wird das Volumenelement nach Abschnitt 6.2 verwendet. Um den Einfluss der Lagerung möglichst gering zu halten, wird die Einspannung mit dem Interfacelement aus Abschnitt 6.3 modelliert. Dies liefert zunächst die Referenzlösung 3D. Um eine zweite Referenzlösung zu erhalten, wird die Verwölbung in Längsrichtung an der Einspannung behindert, was zu der Referenzlösung 3DW führt. Die Lastaufbringung erfolgt in beiden Fällen mit Hilfe des Interfacelements im Querschnittsschwerpunkt des freien Endes. Vernetzt wird das Volumenmodell mit 20 Elementen in Längsrichtung, 8 über die Breite und 4 über die Höhe. Die Ergebnisse werden schließlich mit denjenigen der gekoppelten Berechnungen verglichen, wobei die gekoppelten Berechnungen einmal mit den DBC und einmal mit den PBCC für das RVE durchgeführt werden. Die RVE-Längen werden zunächst auf  $L_{RVE} = 1$  gesetzt.

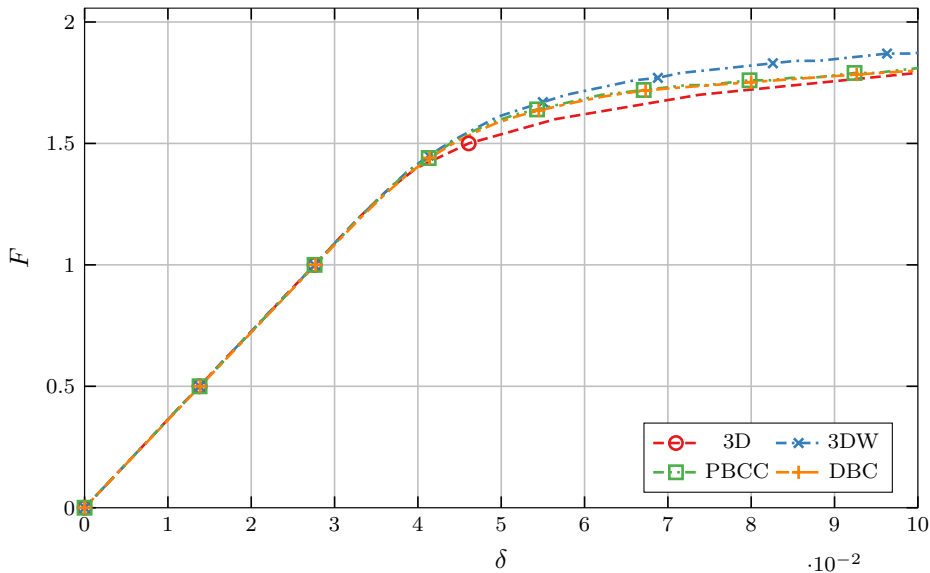


Abbildung 8.11: Angreifende Kraft  $F$  über die Absenkung  $\delta$  – Systemlänge  $L = 6$ , Vergleich mit Referenz.

Die Ergebnisse sind in Abb. 8.11 dargestellt. Zu erkennen ist, dass die Randbedingungen am Volumenmodell einen leichten Einfluss auf das Ergebnis bei Eintreten der Plastizität haben. Wie zu erwarten war, führt die Wölbbehinderung bei 3DW

zu einer leichten Erhöhung der resultierenden Last. Die Ergebnisse der gekoppelten Berechnungen sind für die gewählte RVE-Länge quasi identisch. Beide Lösungen liegen dabei zwischen den beiden Referenzlösungen und liefern somit sehr gute Ergebnisse.

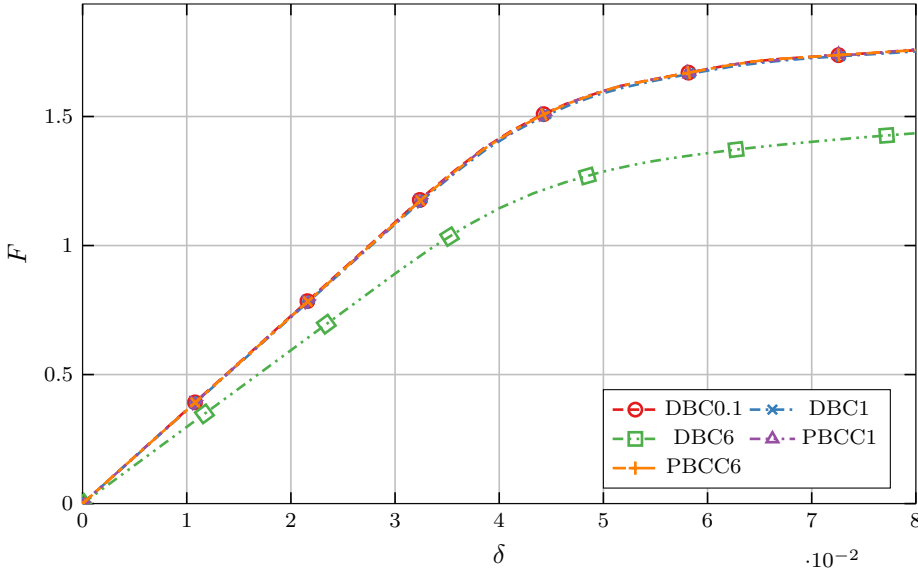


Abbildung 8.12: Angreifende Kraft  $F$  über die Absenkung  $\delta$  – Systemlänge  $L = 6$ , Einfluss der RVE-Länge  $L_{RVE}$ .

Abschließend wird noch der Einfluss der RVE-Länge für dieses Beispiel untersucht. Die Ergebnisse sind dabei in Abb. 8.12 dargestellt. Für die Unterscheidung sind die gewählten RVE-Längen an die Bezeichnungen der Randbedingungen angehängt. Dies bedeutet für DBC0.1 wurde eine RVE-Länge  $L_{RVE} = 0.1$  gewählt und für DBC1 ist folglich  $L_{RVE} = 1$ . Die weiteren Bezeichnungen ergeben sich analog hierzu. Deutlich sichtbar ist, dass bei den DBC mit einer RVE-Länge  $L_{RVE} \leq 1$  keine sichtbaren Veränderungen der Ergebnisse eintreten. Bei einer Vergrößerung der RVE-Länge auf  $L_{RVE} = 6$  wird anhand der Ergebnisse von DBC6 ihr Einfluss deutlich sichtbar. In diesem Fall ist bereits die linear elastische Anfangssteifigkeit zu gering. Zudem setzt die Plastizität bereits ab einer zu niedrigen Last ein. Die Ursache hierfür ist der entstehende lineare Momentenverlauf im RVE infolge der Schubdeformation. Dieser überlagert sich mit demjenigen aus dem konstanten Moment und führt zu lokal erhöhten Normalspannungen innerhalb des RVEs. Bei den PBCC hingegen hat die Länge des RVEs keinen Einfluss auf das Ergebnis. Mit diesen Randbedingungen liefert die gekoppelte Berechnung sowohl für eine RVE-Länge

$L_{RVE} = 1$  als auch  $L_{RVE} = 6$  identische Ergebnisse.

## Torsion

In diesem Beispiel wird das vollplastische Torsionsmoment  $M_T^{pl}$  anhand des Beispiels aus [76] untersucht. Dabei hat der Rechteckquerschnitt eine Breite von  $b = 5$  cm und eine Höhe von  $h = 10$  cm. Die Belastung erfolgt zentrisch, d. h. Referenzachse und Schwerpunkt fallen zusammen ( $s_y = s_z = 0$  cm). Für die Materialparameter werden  $E = 21\,000$  kN cm<sup>-2</sup>,  $\nu = 0.3$  und  $Y_0 = 24$  kN cm<sup>-2</sup> mit linear elastischem, ideal plastischem Materialverhalten gewählt. Da es sich hierbei um eine reine Torsionsbeanspruchung handelt, sind ausschließlich Schubspannungen für das Eintreten der Plastizität verantwortlich. Diese sind dabei auf  $\tau_{max} = 13.86$  kN cm<sup>-2</sup> beschränkt. Nach [76] ergeben sich hierdurch die Grenzwerte

$$\begin{aligned} M_T^{el} &= 0.246 \tau_{max} h b^2 = 852.2 \text{ kN cm} \\ M_T^{pl} &= \frac{1}{6} \tau_{max} b^2 (3h - b) = 1443.4 \text{ kN cm} \end{aligned} \quad (8.1)$$

für das elastische Torsionsmoment  $M_T^{el}$  und das vollplastische Torsionsmoment  $M_T^{pl}$ .

Damit sind die Breite und Höhe des RVEs fest vordefiniert. Für PBCC und PBCL wird die Länge  $L_{RVE} = 5$  cm gewählt. Für DBC hingegen wird die Berechnung einmal mit einer Länge von  $L_{RVE} = 20$  cm (DBC20) und  $L_{RVE} = 100$  cm (DBCL100) durchgeführt. Da in diesem Fall die Nebenbedingung keine Auswirkungen auf das Ergebnis hat, werden nur die Randbedingungen DBC, PBCC und PBCL untersucht. Für PBCL und PBCC werden 3 Elemente in Längsrichtung gewählt und für DBC 8 Elemente, um die Randeffekte auszugleichen. Bei allen Randbedingungen wird die längere Seite mit 8 und die kürzere Seite mit 4 Elementen vernetzt.

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Abb. 8.13 dargestellt. Erkennbar ist, dass sich die Ergebnisse von PBCC und PBCL nicht unterscheiden. Zudem liefern sie vergleichbare Ergebnisse zu denjenigen aus [76]. Bei  $\kappa_x/\kappa_x^{el} = 8$  beträgt bei ihnen das Torsionsmoment  $M_T = 1433.8$  kN cm und bei  $\kappa_x/\kappa_x^{el} = 14$  ist  $M_T = 1441.2$  kN cm. Die Abweichung gegenüber der analytischen Lösung beträgt somit ca. 0.15 %.

Bei den Verschiebungsrandbedingungen hingegen ist zu erkennen, dass sie bei ei-

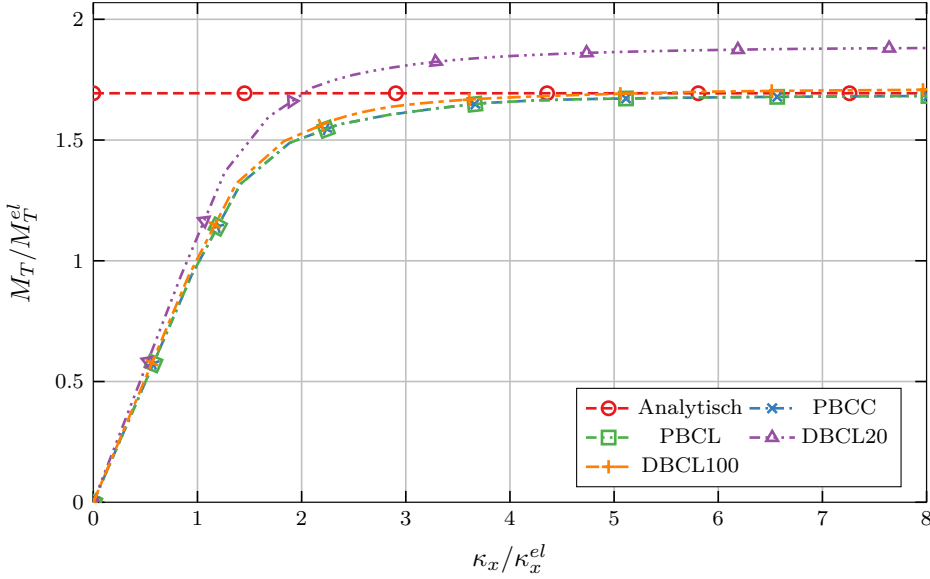


Abbildung 8.13: Torsionsmoment über Verdrillung.

ner RVE-Länge  $L_{RVE} = 20$  cm bereits die Anfangssteifigkeit überschätzen. Der Grund hierfür ist die Wölbbehinderung. Diese führt auch zu einem deutlichen Überschätzen des maximal aufnehmbaren Torsionsmoments mit einem Wert von  $M_T = 1603$  kN cm bei  $\kappa_x/\kappa_x^{el} = 8$ . Wird die Länge des RVEs auf  $L_{RVE} = 100$  cm (DBCL100) vergrößert, nähern sich die Ergebnisse den korrekten Werten an. Allerdings beträgt das Torsionsmoment bei  $\kappa_x/\kappa_x^{el} = 8$  immer noch  $M_T = 1455.9$  kN cm und überschätzt die korrekte Lösung leicht. Es ist zudem anzumerken, dass hieraus ein Verhältnis  $h/L_{RVE} = 10$  resultiert. Im Vergleich mit Abb. 8.5 wird deutlich, dass bei diesem Längenverhältnis die Schubsteifigkeit bereits nahe Null ist.

Der Vergleich mit der Referenzlösung ist in Abb. 8.14 dargestellt. Hierbei sind hinsichtlich der Übersichtlichkeit nur noch die PBCC sowie die Ergebnisse aus [76] gegenübergestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass die Last-Verdrillungskurven sehr gut übereinstimmen.

Die Ursache für das zu steife Verhalten der DBC wird bei Betrachtung der plastischen Vergleichsdehnung im vollplastischen Zustand ersichtlich, siehe Abb. 8.15. Bei den DBC (links) sind deutlich die Randeffekte infolge der Wölbbehinderung zu erkennen. Dies führt dazu, dass die Randbereiche überhaupt nicht plastizieren, während sich in Längsrichtung eine stark inhomogene Verteilung einstellt. Die

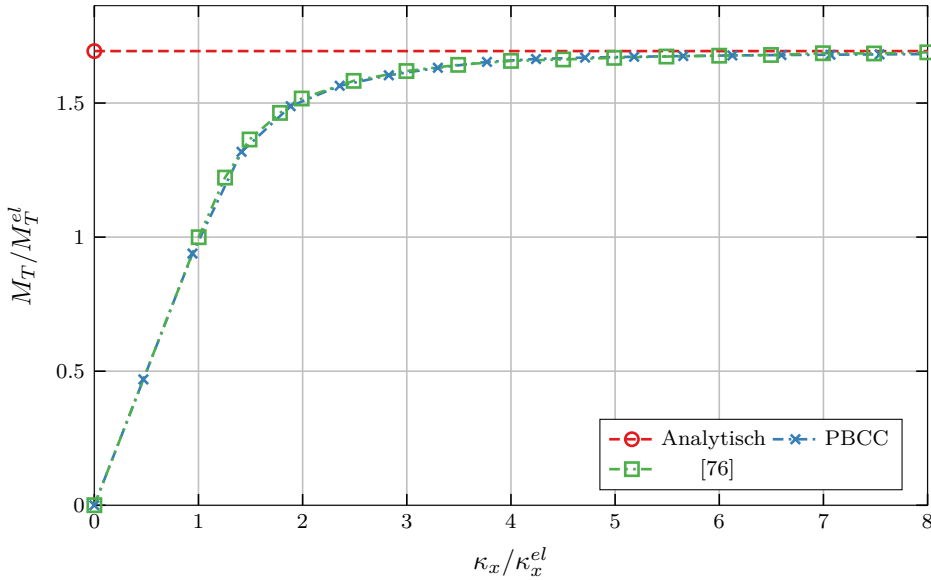


Abbildung 8.14: Torsionsmoment über Verdrillung – Vergleich mit Referenz [76].

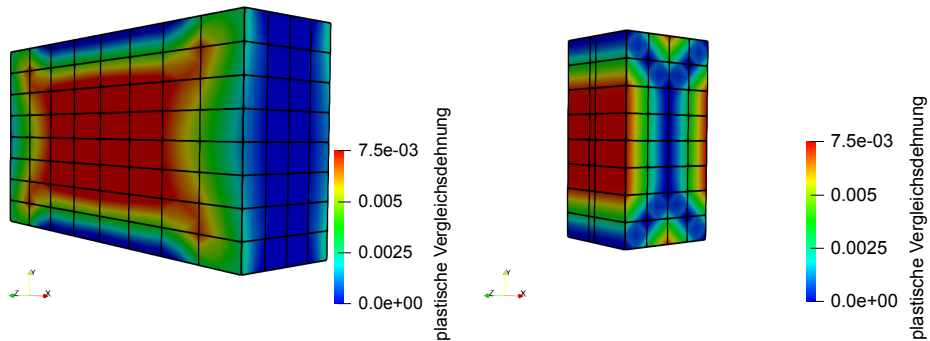


Abbildung 8.15: Plastische Vergleichsdehnung im vollplastischen Zustand – links DBCL20 und rechts PBCC.

PBCC (rechts) weisen keinerlei Randeffekte auf. Dadurch stellt sich ein in Längsrichtung gleichförmiger Zustand ein. Daher genügt es auch, das dargestellte Netz mit nur 3 Elementen in diese Richtung zu vernetzen, wobei anzumerken ist, dass die Wahl von 3 Elementen aufgrund der Rotationsnebenbedingung (Interfacelement Abschnitt 6.4) zustande kommt.

## 8.2 U-Profil

In diesem Abschnitt wird ein U-Profil als Beispiel für einen dünnwandigen offenen Querschnitt untersucht. Die Geometrie des Querschnitts ist in Abb. 8.16 dargestellt.

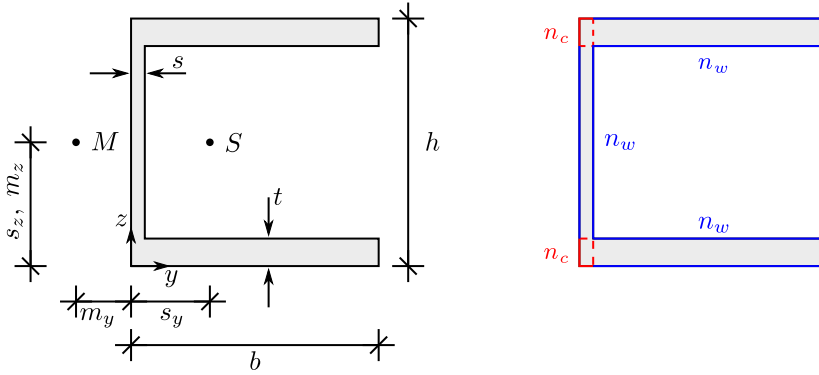


Abbildung 8.16: Geometrie des Querschnitts (links) und Netzparameter des Querschnitts (rechts).

Dabei wird die Höhe und Breite zu  $h = b = 10$  cm gewählt. Der Steg besitzt eine Dicke von  $s = 0.6$  cm und der Flansch eine Dicke von  $t = 1.2$  cm. Zudem sind zur Beschreibung des FE-Netzes die erforderlichen Parameter in Abb. 8.16 dargestellt. Dabei ist  $n_c$  die Anzahl der Elemente über die kurzen Seiten und  $n_w$  die Anzahl der Elemente über die langen Seiten.

### 8.2.1 Effektive Querschnittswerte – Lineare Elastizität

In einem ersten Schritt werden die effektiven Querschnittswerte mit dem Element aus [26] ermittelt. Hierbei wird linear elastisches Materialverhalten mit einem Elastizitätsmodul  $E = 21\,000 \text{ kN cm}^{-2}$  und einer Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$  angenommen.

Die in Tabelle 8.2 angegebenen Querschnittswerte beziehen sich, bis auf  $I_T$ , auf den Schwerpunkt  $S$  des Querschnitts. Angegeben ist das St. Venant'sche Torsionsträgheitsmoment  $I_T$ . Dieses bezieht sich auf den Schubmittelpunkt  $M$ . Mit Hilfe von Gleichung (3.33) ergibt sich die Torsionssteifigkeit bzgl. des Schwerpunkts  $S$  zu  $I_T^* = 310.018 \text{ cm}^4$ . Die angegebenen Abstände beziehen sich auf Abb. 8.16.



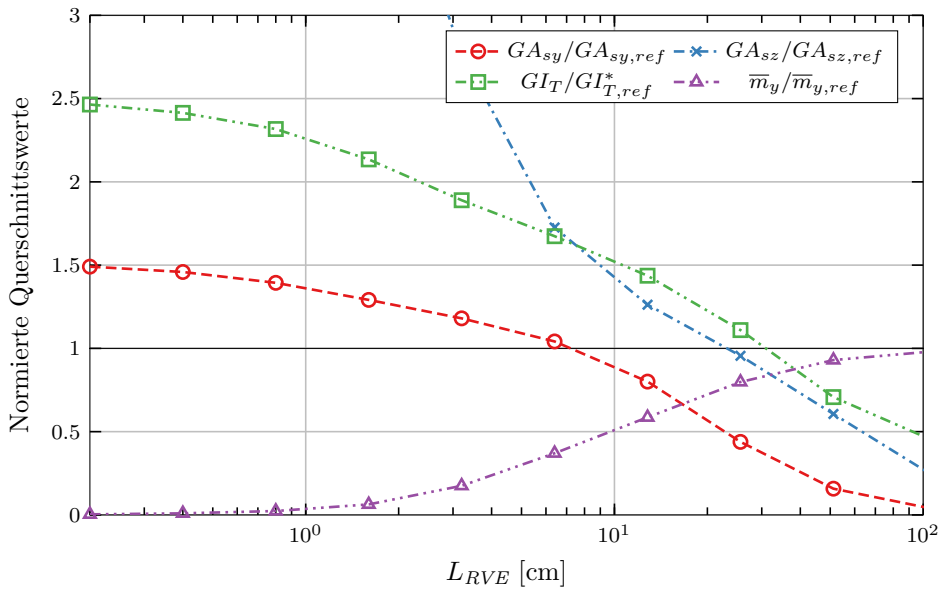
$A$	$I_y$	$I_z$	$I_T$
28.56 cm <sup>2</sup>	489.4688 cm <sup>4</sup>	284.784 19 cm <sup>4</sup>	11.293 598 cm <sup>4</sup>

$s_y$	$s_z$	$m_y$	$m_z$	$\kappa_y$	$\kappa_z$
4.249 579 8 cm	5 cm	4.082 818 4 cm	5 cm	0.659 100 48	0.150 650 91

Tabelle 8.2: Querschnittswerte U-Profil.

Zunächst werden die Verschiebungsrandbedingungen DBC untersucht. Für das FE-Netz wird hierbei  $n_c = n_w = 4$  gewählt, vgl. Abb. 8.16. In Längsrichtung wird das RVE mit 9 Elementen vernetzt. Es wird angenommen, dass die Referenzachse des Balkens durch den Schwerpunkt des Querschnitts verläuft.

Abbildung 8.17: Normierte Querschnittswerte über die Länge  $L_{RVE}$  des RVEs – DBC.

Die Zielsetzung ist die Untersuchung der Längenabhängigkeit der homogenisierten Querschnittswerte. Dabei ist anzumerken, dass sowohl die homogenisierte Dehnsteifigkeit  $EA$  als auch die beiden homogenisierten Biegesteifigkeiten  $EI_y$  und  $EI_z$  längenunabhängig und exakt sind. Für die übrigen Querschnittswerte sind die normierten Ergebnisse in Abb. 8.17 dargestellt. Zu erkennen ist, dass bei der kürzesten

RVE-Länge von  $L_{RVE} = 0.2$  cm die Schubsteifigkeiten deutlich überschätzt werden. Speziell bei der Schubsteifigkeit in  $z$ -Richtung ergibt sich bei dieser RVE-Länge ein Verhältnis von  $GA_{sz}/GA_{sz,ref} = 6.45$ . Weiterhin fallen beide Schubsteifigkeiten mit zunehmender RVE-Länge wieder auf null ab. Es ist wichtig anzumerken, dass sich die RVE-Längen für ein Verhältnis  $GA_s/GA_{s,ref} = 1$  für die beiden Belastungsrichtungen stark unterscheiden. Weiterhin ist die Torsionssteifigkeit dargestellt. Da Schubmittelpunkt und Schwerpunkt in diesem Beispiel nicht zusammenfallen, ist diese von der Schubsteifigkeit abhängig. Daher ist in diesem Diagramm keine Konvergenz erkennbar. Mit einer weiteren Steigerung der RVE-Länge würde diese wieder gegen die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit konvergieren, was sich allerdings aus numerischen Gründen nicht mehr durchführen ließ. Eine weitere interessante Größe ist der Abstand des Schubmittelpunkts zum Schwerpunkt in  $y$ -Richtung. Hierbei ist  $\bar{m}_y = m_y + s_y$ . Die Homogenisierung eines kurzen RVEs liefert, dass Schubmittelpunkt und Schwerpunkt des Querschnitts zusammenfallen. Erst bei sehr großen Längen  $L_{RVE}$  verliert sich der Einfluss der Randbedingungen und die homogenisierten Werte konvergieren gegen die Referenzlösung.

Zusammenfassend wird an dieser Stelle das Problem der Längenabhängigkeit der Ergebnisse der DBC noch einmal deutlich. Bei zu kurzen RVEs werden die Schubsteifigkeiten deutlich überschätzt. Die Längen, bei denen das RVE die korrekten Schubsteifigkeiten liefert, sind für beide Belastungsrichtungen unterschiedlich. Zudem fallen beide Schubsteifigkeiten mit zunehmender Länge auf null ab. Dahingegen wird für die Ermittlung des Schubmittelpunkts eine sehr große RVE-Länge benötigt. Diese Beobachtungen führen zu einem Konflikt und machen diese Randbedingungen unbrauchbar.

Bei der Homogenisierung des RVEs mit den periodischen Randbedingungen PBCC sowie PBCL ist wiederum keine Längenabhängigkeit festzustellen. Zur Vollständigkeit sind die resultierenden Querschnittswerte bei einer Vernetzung von  $n_c = 2$ ,  $n_w = 4$  und 3 Elementen in Längsrichtung in Tabelle 8.3 angegeben. Hierbei werden die Längen  $L_{RVE} = 1$  cm und  $L_{RVE} = 100$  cm berücksichtigt. Zur Ermittlung dieser Werte liegt die Referenzachse im linken unteren Eck des Querschnitts. Die Ergebnisse sind entsprechend umgerechnet. Dies bedeutet, dass sich die angegebenen Werte für  $I_y$  und  $I_z$  auf den Schwerpunkt des Profils beziehen. Das Torsionsträgheitsmoment  $I_T$  hingegen bezieht sich auf den Schubmittelpunkt  $M$ . Beim Vergleich der Werte mit den Referenzwerten ergibt sich eine Abweichung von weniger als 1 % für  $I_T$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ ,  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$ . Diese Werte haben gemeinsam, dass sie nicht nur von

$L_{RVE} = 1 \text{ cm}$ :

$A$	$I_y$	$I_z$	$I_T$
$28.56 \text{ cm}^2$	$489.469 \text{ cm}^4$	$284.784 \text{ 195 cm}^4$	$11.396 \text{ 995 01 cm}^4$

$s_y$	$s_z$	$m_y$	$m_z$	$\kappa_y$	$\kappa_z$
$4.249 \text{ 58 cm}$	$5 \text{ cm}$	$4.077 \text{ 032 3 cm}$	$4.999 \text{ 998 9 cm}$	$0.662 \text{ 21}$	$0.151 \text{ 97}$

$L_{RVE} = 100 \text{ cm}$ :

$A$	$I_y$	$I_z$	$I_T$
$28.56 \text{ cm}^2$	$489.469 \text{ cm}^4$	$284.784 \text{ 195 cm}^4$	$11.396 \text{ 995 01 cm}^4$

$s_y$	$s_z$	$m_y$	$m_z$	$\kappa_y$	$\kappa_z$
$4.249 \text{ 58 cm}$	$5 \text{ cm}$	$4.077 \text{ 032 3 cm}$	$4.999 \text{ 998 9 cm}$	$0.662 \text{ 21}$	$0.151 \text{ 97}$

Tabelle 8.3: Resultierende Querschnittswerte mit PBCC für  $L_{RVE} = 1 \text{ cm}$  und  $L_{RVE} = 100 \text{ cm}$ .

der Geometrie des Querschnitts, sondern auch von seiner Verwölbung abhängen.

### 8.2.2 Biegedrillknicken eines zentrisch gedrückten Kragarms

In diesem Beispiel wird untersucht, ob das Verfahren in der Lage ist das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken zu erfassen. Die Querschnittsgeometrie und Materialparameter werden vom vorherigen Beispiel übernommen. Zum Vergleich werden die analytischen Werte für Knicken, Drillknicken und Biegedrillknicken ermittelt. Die hierfür benötigten Formeln finden sich bspw. in [18, 47] und sind im Folgenden für das Beispiel angegeben und ausgewertet.

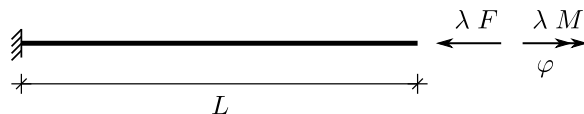


Abbildung 8.18: Geometrie und Last des Systems.

Das System mit Belastung ist in Abb. 8.18 dargestellt. Es werden eine Länge  $L = 150 \text{ cm}$  und die Belastungen  $F = 100 \text{ kN}$ ,  $M = 0.1 \text{ kN cm}$  gewählt, wel-

che am Kragarmende im Schwerpunkt des Querschnitts angreifen. Der benötigte Wölbwiderstand lässt sich mit dem Element aus [26] ermitteln und ergibt  $C_M = 4585.0848 \text{ cm}^6$ . Weiterhin beträgt die Knicklänge  $s_k$  aufgrund der Randbedingungen 300 cm. Die Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  beziehen sich auf den Schwerpunkt des Querschnitts. Zudem werden der Abstand zwischen Schwer- und Schubmittelpunkt  $\bar{m}_y = m_y + s_y$ , sowie der polare Trägheitsradius bezüglich des Schubmittelpunkts  $i_M = \sqrt{\frac{I_y}{A} + \frac{I_z}{A} + \bar{m}_y^2}$  benötigt. Die hierfür erforderlichen Werte sind in Tabelle 8.2 angegeben. Damit ergibt sich die kritische Knicklast für die starke Achse zu

$$F_{K,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{s_k^2} = 1127 \text{ kN} \quad (8.2)$$

und für die schwache Achse zu

$$F_{K,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{s_k^2} = 655 \text{ kN}. \quad (8.3)$$

Weiterhin wird die kritische Drillknicklast benötigt. Diese beträgt

$$F_T = \frac{1}{i_M^2} \left( GI_T + \frac{\pi^2 EC_M}{s_k^2} \right) = 1055 \text{ kN}. \quad (8.4)$$

Damit kann die kritische Biegedrillknicklast zu

$$\frac{1}{F_B} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{F_{K,y}} + \frac{1}{F_T} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{F_{K,y}} - \frac{1}{F_T} \right)^2 + \frac{1}{F_{K,y} F_T} \left( \frac{\bar{m}_y}{i_M} \right)^2} \right] \rightarrow F_B = 589 \text{ kN} \quad (8.5)$$

ermittelt werden.

Für die Vergleichsrechnung wird das RVE für die PBCC mit  $n_c = 2$ ,  $n_w = 4$  und in Längsrichtung mit 3 Elementen vernetzt. Die Länge des RVEs beträgt  $L_{RVE} = 10 \text{ cm}$ , während die Dicke des Rotationsinterfaces zu  $d = L_{RVE}/10$  gewählt wird. Im Fall der DBC wird die identische Querschnittsvernetzung mit 5 Elementen in Längsrichtung gewählt. Die Länge des RVEs beträgt  $L_{RVE} = 10 \text{ cm}$ . Das Balkensystem wird mit 20 linearen Elementen vernetzt. Für die Berechnung wird geometrische Nichtlinearität sowohl auf der makroskopischen als auch auf der mesoskopischen Skala vorausgesetzt.

Zur Ermittlung einer Referenzlösung wird das System mit Volumenelementen berechnet. Die Randbedingungen sowie die Lasten sind über das Interfacelement

nach Abschnitt 6.3 aufgebracht. Auch hier wird der Querschnitt mit  $n_c = 2$  und  $n_w = 4$  vernetzt. Wobei für die Längsrichtung 40 Elemente gewählt werden.

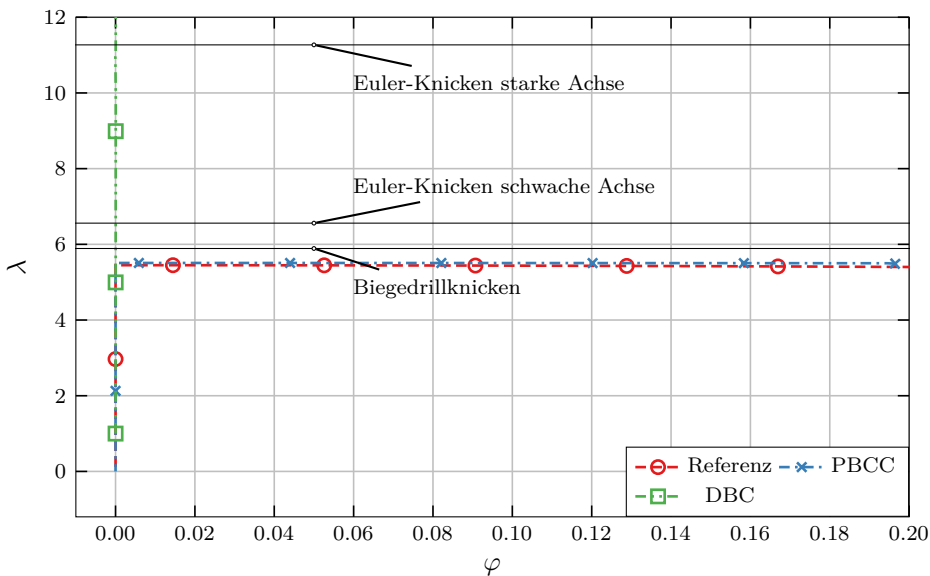


Abbildung 8.19: Lastfaktor  $\lambda$  über Endverdrehung  $\varphi$ .

Die Ergebnisse sind in Abb. 8.19 dargestellt. Dabei wird das System mit der angegebenen Belastung berechnet und nach Entfernen des Störmoments  $M$  wieder entlastet. Dargestellt ist der Entlastungspfad, welcher dem stabilen Belastungspfad an einem perfekten System entspricht. Zu erkennen ist, dass die PBCC nahezu identische Ergebnisse wie die Referenzlösung liefern. Im Vergleich zur analytischen Lösung, wird die kritische Last für das Biegedrillknicken leicht unterschritten. Für die DBC ist nur der Belastungspfad dargestellt. Interessant hierbei ist, dass weder das Biegedrillknicken noch das reine Biegeknicken erfasst werden. Beim Biegedrillknicken ist dies auf die Wölbbehinderung durch die DBC zurückzuführen, welche die Tragfähigkeit des Systems wesentlich steigert. Für das Biegeknicken fehlt hingegen die benötigte Imperfektion, um das System in den stabilen Pfad zu lenken. Theoretisch ist diese Imperfektion durch das Störmoment  $M$  auf das System aufgebracht, da bei dem gewählten Querschnitt der Schubmittelpunkt und Schwerpunkt nicht zusammenfallen. Bei Betrachtung von Abb. 8.17, wird allerdings ersichtlich, dass der Abstand zwischen den beiden Punkten deutlich unterschätzt wird. Da das Biegeknicken als globales Versagen durch das Balkenelement abgebildet wer-

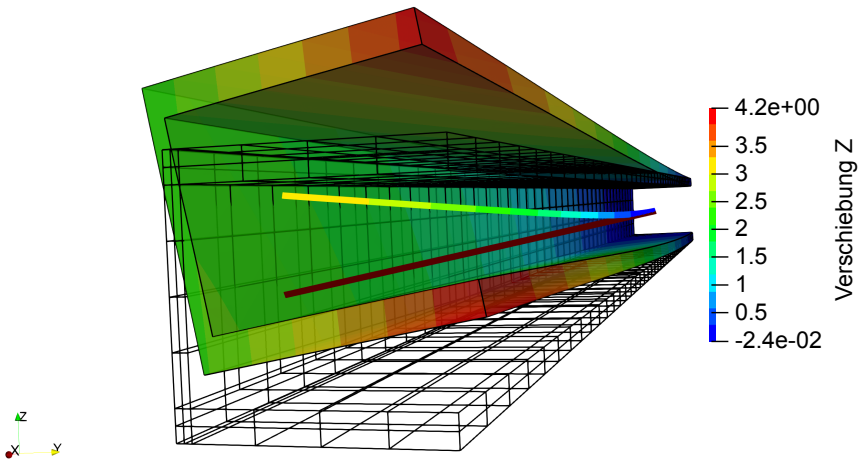


Abbildung 8.20: Undeformiertes Netz und deformierte Geometrie des Volumen- und Balkenmodells für  $\varphi = 0.19$  und  $\lambda = 5.5$  auf dem Entlastungspfad ohne Störmoment  $M$  – Verschiebungen in  $z$ -Richtung in cm.

den kann, taucht bei Überschreiten der kritischen Last für die schwache Achse ein negatives Diagonalelement in der Steifigkeitsmatrix auf. Ab dieser Last befindet sich das System mit den DBC auf einem instabilen Pfad.

Zur Veranschaulichung ist das Netz des Volumenmodells und seine deformierte Geometrie in Abb. 8.20 dargestellt. Weiterhin ist das Balkenmodell vergleichend in die Schwereachse gelegt und auch dessen Referenz- und Momentankonfiguration abgebildet. Die vom Balken erfassten mittleren Verschiebungen in  $z$ -Richtung stimmen sehr gut mit denjenigen des Volumenmodells überein. Zudem lässt sich anhand des Volumenmodells das Tordieren des Querschnitts infolge Biegedrillknicken erkennen.

## 8.3 Geschichteter Querschnitt

In diesem Beispiel wird ein geschichteter Querschnitt untersucht. Dieser besitzt einen Kern mit der Höhe  $h_C$  sowie zwei Deckschichten mit jeweils der Höhe  $h_L$ . Seine Breite beträgt  $b$ . Zur Veranschaulichung ist der Querschnitt in Abb. 8.21 dargestellt.

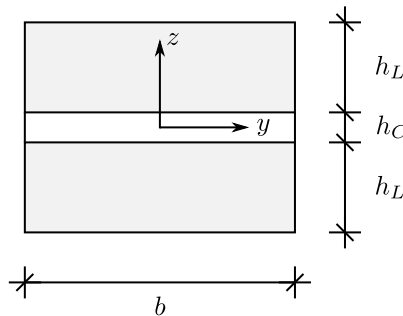


Abbildung 8.21: Querschnittsgeometrie – 3-schichtiger Querschnitt.

### 8.3.1 Effektive Querschnittswerte – Lineare Elastizität

In diesem Abschnitt werden die homogenisierten linear elastischen Querschnittswerte untersucht. Dabei wird eine Breite  $b = 20$  cm und eine Höhe  $h = 2h_L + h_C = 20$  cm für den betrachteten Querschnitt gewählt, vgl. Abb. 8.21. Genauer wird der Einfluss des Kernanteils  $\rho_C$  betrachtet. Hierfür ist es erforderlich, dass sich die Kernhöhe zu  $h_C = \rho_C h$  und die Deckschichthöhen zu  $h_L = (1 - \rho_C) h / 2$  ergeben. Das Ziel ist die Ermittlung der Dehnsteifigkeit  $EA$ , der Biegesteifigkeit um die  $y$ -Achse  $EI_y$  sowie des Schubkorrekturfaktors in  $z$ -Richtung  $\kappa_z$ . Der Kern besitzt den Elastizitätsmodul  $E_C$  und die Deckschichten entsprechend  $E_L$ . Mit der Definition  $s_L = (h_L + h_C) / 2$  und dem Steifigkeitsverhältnis  $\alpha = E_C / E_L$  unter der Annahme, dass die Querkontraktionszahl  $\nu$  für Kern und Deckschicht identisch sind, ergibt sich

$$EA = E_L b (\alpha h_C + h_L), \quad (8.6)$$

$$EI_y = E_L b \left( \alpha \frac{h_C^3}{12} + 2 \left[ \frac{h_L^3}{12} + s_L^2 h_L \right] \right). \quad (8.7)$$

Der Schubkorrekturfaktor  $\kappa_z$  berechnet sich nach [72] mit

$$\begin{aligned} A(\rho_C) &= \frac{(1 - \rho_C)^3}{15} (3\rho_C^2 + 9\rho_C + 8), \\ T_1(\rho_C) &= (1 - \rho_C^3) + \rho_C^3 \alpha, \\ T_2(\rho_C) &= \frac{1 - \rho_C}{\alpha} + \rho_C, \end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned} T_3(\rho_C) &= (1 - \rho_C^2)^2 + \frac{8}{15} \alpha^2 \rho_C^4 + \frac{4}{3} \alpha \rho_C^2 (1 - \rho_C^2), \\ T_4(\rho_C) &= A(\rho_C) \alpha + \rho_C T_3 \end{aligned} \tag{8.9}$$

zu

$$\kappa_z = \frac{4}{9} \frac{T_1^2}{T_2 T_4}. \tag{8.10}$$

Für einen Vergleich mit der Referenzlösung werden in diesem Beispiel nur die PB-CC verwendet. Das RVE wird dabei mit 4 Elementen über die Dicke pro Schicht, 4 Elementen über die Breite und 9 Elementen in Längsrichtung vernetzt. Für die Materialparameter wird ein Elastizitätsmodul für die Deckschichten von  $E_L = 1000 \text{ kN cm}^{-2}$  und eine Querkontraktionszahl für alle drei Schichten von  $\nu = 0.3$  gewählt. Der Elastizitätsmodul für den Kern ergibt sich entsprechend des Steifigkeitsverhältnisses  $\alpha$ .

Die Ergebnisse für die resultierende Dehnsteifigkeit sind in Abb. 8.22 dargestellt, wobei sich die Referenzlösung nach Gleichung (8.6) ergibt. Zu erkennen ist die sehr gute Übereinstimmung zwischen Referenzlösung und den homogenisierten Werten mit den PBCC. Die Qualität der homogenisierten Werte ist unabhängig vom Kernanteil  $\rho_C$  und Steifigkeitsverhältnis  $\alpha$ .

Für die Biegesteifigkeit sind die Ergebnisse in Abb. 8.23 dargestellt. Auch hier ist eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung nach Gleichung (8.7) zu erkennen. Unterschiede in den Ergebnissen sind rein numerischer Natur, d. h. die Ergebnisse stimmen mit 7 Stellen (Ausgabegenauigkeit) überein.

In einem nächsten Schritt werden die resultierenden Schubkorrekturfaktoren untersucht. Die Ergebnisse sind in Abb. 8.24 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass die Ergebnisse wieder sehr gut mit der analytischen Lösung nach Gleichung (8.10)



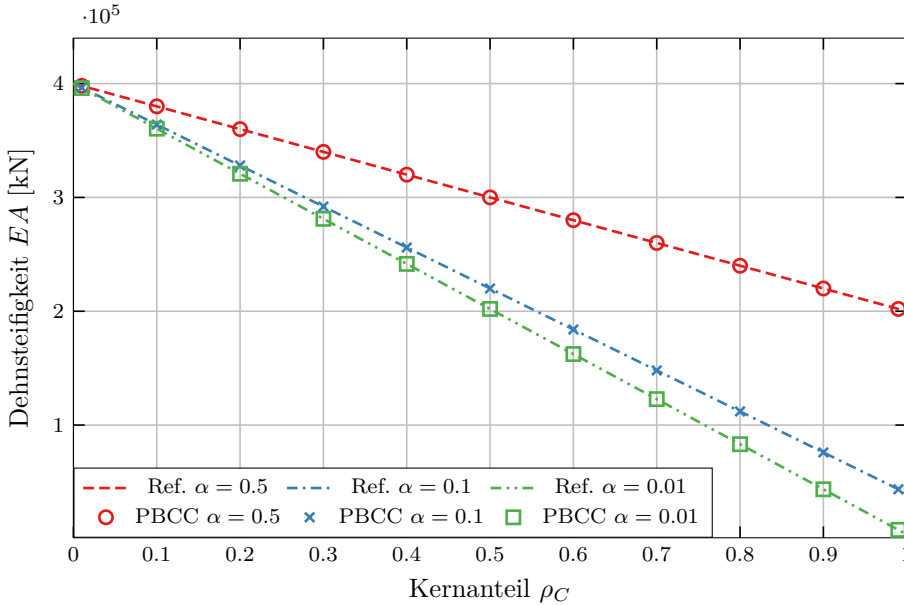


Abbildung 8.22: Vergleich der resultierenden Dehnsteifigkeiten für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse  $\alpha$  und Kernanteile  $\rho_C$ .

übereinstimmen. Für die Randwerte  $\rho_C = 0$  und  $\rho_C = 1$  stellt sich in der analytischen Lösung ein Schubkorrekturfaktor für einen Rechteckquerschnitt von  $\kappa_z = 5/6$  ein. In diesen Fällen ist der Querschnitt homogen und das Ergebnis somit plausibel. Dieser Fall wurde mit dem Homogenisierungsverfahren bereits in Abschnitt 8.1.1 untersucht. Daher beschränken sich die Werte von  $\rho_C$  auf einen Bereich von 1 % bis 99 % Kernanteil. Als konkretes Zahlenbeispiel ergibt sich für den Schubkorrekturfaktor mit  $\alpha = 0.001$  und  $\rho_C = 0.4$  ein Wert von  $\kappa_z = 0.002\,296\,1$  mit der analytischen Lösung und  $\kappa_z = 0.002\,296\,1$  mit dem Homogenisierungsverfahren. Die Ergebnisse stimmen damit auf 5 Stellen genau überein. Die resultierende Schubsteifigkeit beträgt, unter Berücksichtigung der Verwölbung,  $1/500$  gegenüber derjenigen, welche sich aus der Annahme des Ebenbleibens des Querschnitts ergeben würde. Die Ergebnisse des Schubkorrekturfaktors wurden zudem mit dem Element aus [25] verglichen. Hierbei ergaben sich identische Werte.

Die Schubdeformation des RVEs ist exemplarisch für einen Kernanteil von  $\rho_C = 0.1$  in Abb. 8.25a und  $\rho_C = 0.9$  in Abb. 8.25b dargestellt. In beiden Fällen ist die Verwölbung in Längsrichtung des RVEs konstant und die Schubspannungen halten die Spannungsrandbedingungen ein. Die Scherung selbst findet in erster Linie im

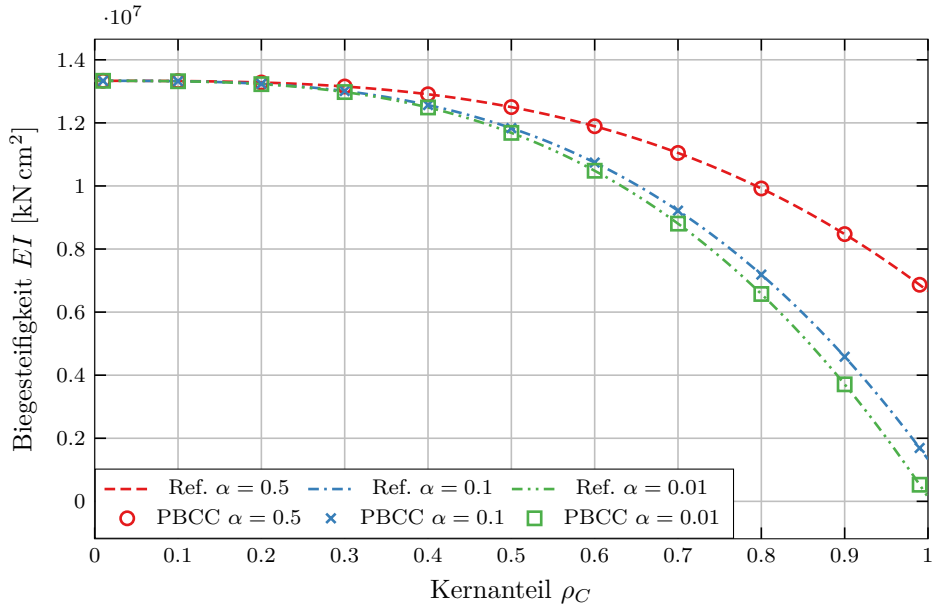


Abbildung 8.23: Vergleich der resultierenden Biegesteifigkeiten für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse  $\alpha$  und Kernanteile  $\rho_C$ .

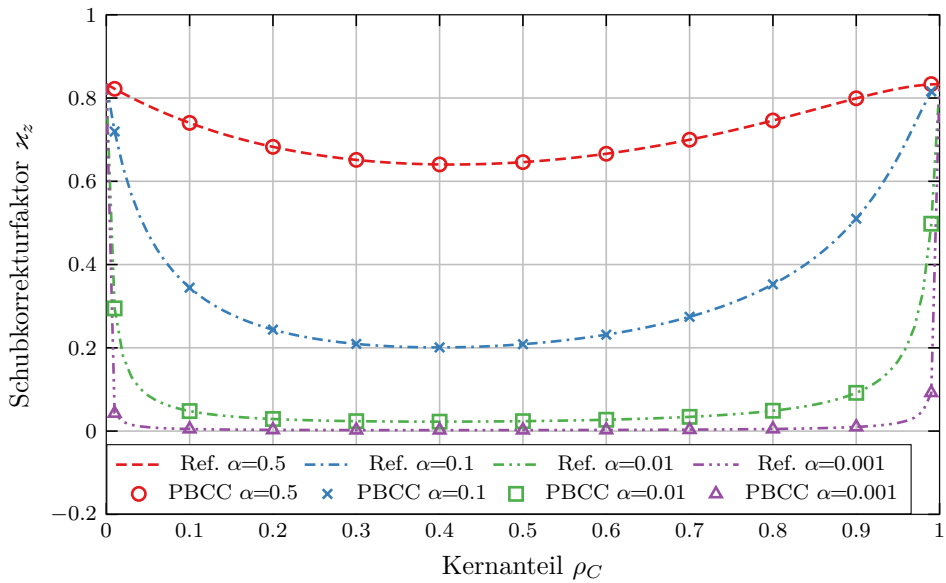


Abbildung 8.24: Vergleich der resultierenden Schubkorrekturfaktoren für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse  $\alpha$  und Kernanteile  $\rho_C$ .

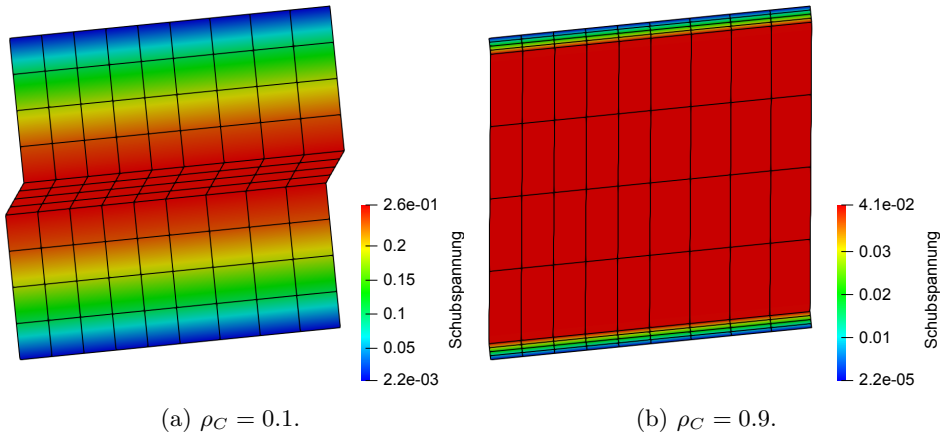


Abbildung 8.25: Schubspannung und -deformation des RVEs für  $\alpha = 0.001$  und  $\gamma_z = 0.1$  in  $[\text{kN cm}^{-2}]$ .

weichen Kern statt. Dies ist deutlich erkennbar an den deformierten Elementen für diese Schicht, welche in der Ausgangskonfiguration aus dieser Ansicht perfekte Rechtecke waren.

### 8.3.2 Verhalten bei Plastizieren der Deckschichten

Für diese Berechnung wird das Beispiel nach [20] verwendet. Es handelt sich dabei um einen einachsigen gespannten Plattenstreifen, welcher aus einem dreischichtigen Sandwichprofil besteht. Für den Kern wird linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Dabei sind sein Elastizitätsmodul  $E_C = 70 \text{ N mm}^{-2}$  und seine Querkontraktionszahl  $\nu_C = 0.3$ . In den Deckschichten wird die Plastizität nach von Mises angenommen. Der Elastizitätsmodul wird hier zu  $E_L = 70\,000 \text{ N mm}^{-2}$  und die Querkontraktionszahl zu  $\nu_L = 0.3$  gewählt. Die für das plastische Materialgesetz noch fehlenden Parameter sind die Fließgrenze  $Y_0 = 100 \text{ N mm}^{-2}$  und der Verfestigungsmodul  $H = 1000 \text{ N mm}^{-2}$ . Als Geometrieparameter des Querschnitts werden  $h_C = 30 \text{ mm}$ ,  $h_L = 0.5 \text{ mm}$  und  $b = 60 \text{ mm}$  gewählt. Es ist anzumerken, dass ein ebener Verzerrungszustand herrscht.

Die Systemgeometrie ist in Abb. 8.26 dargestellt. Für die Berechnung wird die Länge zu  $L = 2000 \text{ mm}$  und die Belastung  $\bar{q} = 0.001 \text{ N mm}^{-2}$  gewählt. Da die

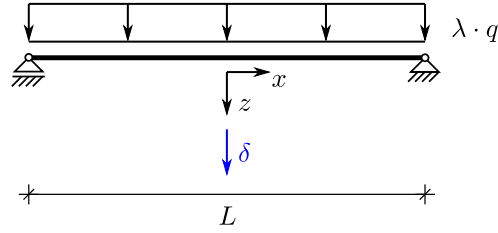


Abbildung 8.26: Systemgeometrie und Belastung.

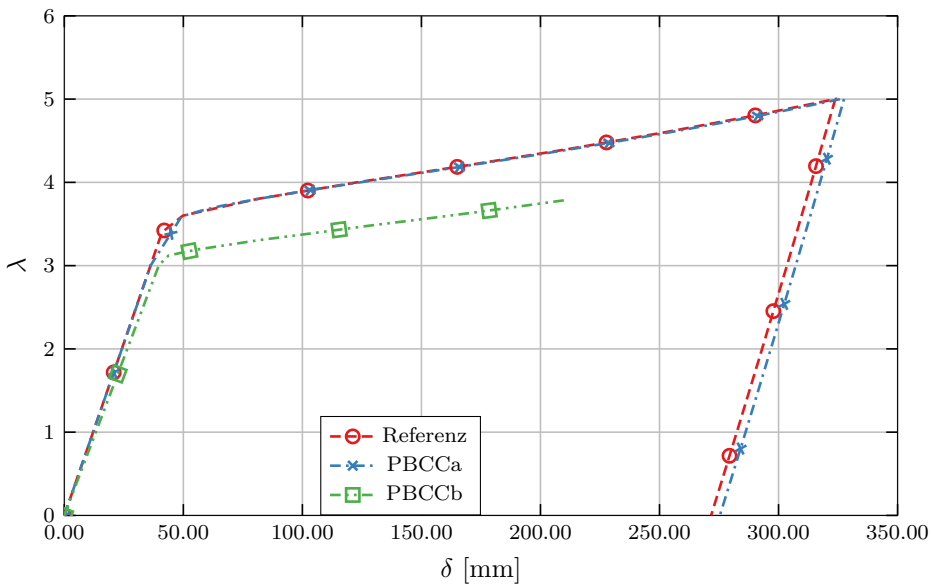


Abbildung 8.27: Last-Verschiebungskurve – Vergleich ebener Verzerrungszustand (PBCCa) und ebener Spannungszustand (PBCCb) mit Referenzlösung [20].

Belastung auf das Balkensystem aufgebracht wird, muss diese mit der Breite multipliziert werden. Dies liefert  $q = 0.06 \text{ N mm}^{-1}$ . Untersucht wird die dargestellte Absenkung  $\delta$  über den Lastfaktor  $\lambda$ .

Das RVE besitzt die zuvor angegebenen Querschnittsabmessungen. Zudem wird seine Länge zu  $L_{RVE} = 10 \text{ mm}$  gewählt. Das Interfacelement in der Mitte des RVEs hat eine Dicke von  $d = 0.5 \text{ mm}$ . Für jede daraus resultierende Kante werden zwei Elemente für die Vernetzung gewählt. Dies bedeutet, dass sowohl der Kern als auch jede Deckschicht mit 2 Elementen über die Dicke modelliert wird. In Längsrichtung

resultiert infolge des Interfacelements eine Vernetzung von 5 Elementen, siehe auch Abb. 8.28. Die Berechnung des RVEs wird geometrisch linear durchgeführt.

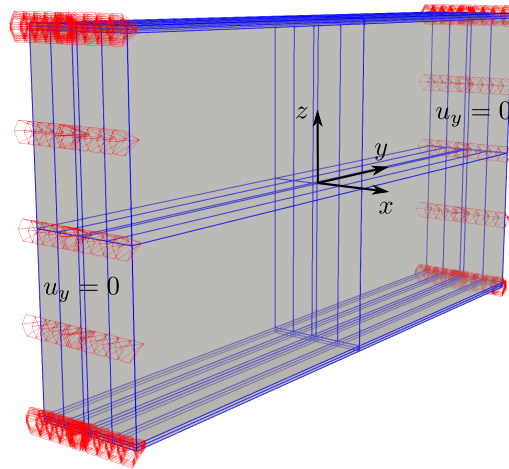


Abbildung 8.28: Zusätzliche Verschiebungsrandbedingungen für die Annahme eines ebenen Verzerrungszustands.

Für die Modellierung der makroskopischen Skala werden 14 Balkenelemente verwendet. Diese Wahl ist für den Vergleich der Schubspannungen mit denjenigen aus [20] erforderlich, da somit einer der Integrationspunkte bei  $x \approx 390$  mm liegt. Die Berechnung erfolgt geometrisch nichtlinear unter Annahme finiter Rotationen.

Die Ergebnisse sind in Abb. 8.27 dargestellt. Für den Vergleich wurden die PBCC gewählt. Im Speziellen wurden die PBCCb als Standardversion getestet. Diese setzen ein Balkensystem voraus. Da es sich bei der Vergleichsrechnung um einen ebenen Spannungszustand handelt und das System somit einen Plattenstreifen darstellt, liefern diese Randbedingungen zu weiche Ergebnisse, was sich sowohl im Bereich der einsetzenden Plastizität als auch in der linear elastischen Anfangssteifigkeit bemerkbar macht.

Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, wird der ebene Verzerrungszustand durch zusätzliche Randbedingungen gemäß Abb. 8.28 eingeführt. Hierzu werden die Verschiebungen  $u_y$  an den Rändern  $y = \pm b$  auf null gesetzt. In diesem Fall werden

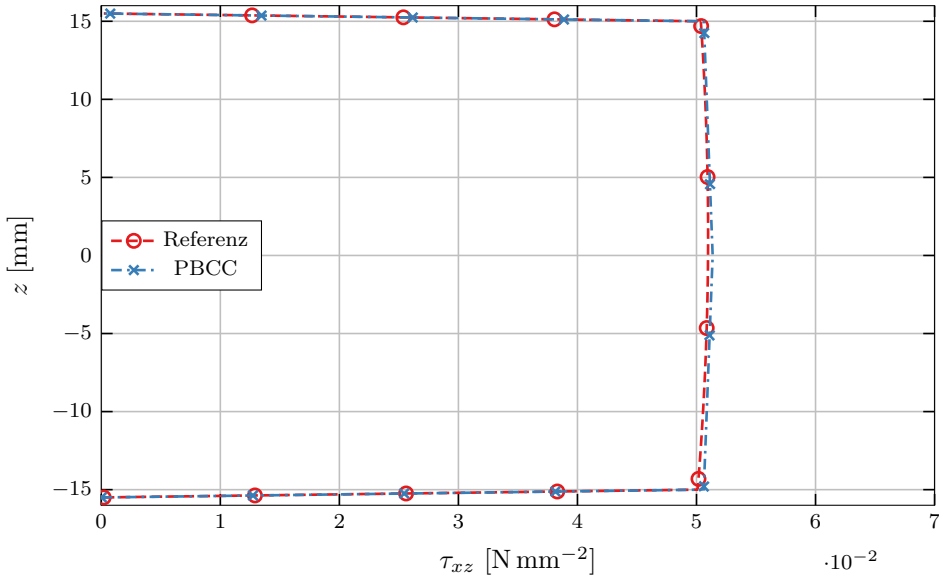


Abbildung 8.29: Vergleich der Schubspannungen für  $\lambda = 4$  bei  $x = 390$  mm.

die Randbedingungen mit PBCCa bezeichnet. Hierbei ist eine sehr gute Übereinstimmung des Last-Verschiebungsverhaltens zwischen der Referenzlösung und der Balkenlösung festzustellen. Diese Modifikation der Randbedingungen ermöglicht somit auch die Berechnung von Plattenstreifen.

Für einen Lastfaktor von  $\lambda = 4$  werden an der Stelle  $x \approx 390$  mm die Schubspannungen mit der Referenzlösung verglichen. Diese sind, über die Höhe des Querschnitts, in Abb. 8.29 dargestellt und stimmen sehr gut mit denjenigen der Referenzlösung überein.

## 8.4 Geschwächter Balken

### 8.4.1 Winkel unter Einzellast

In diesem Beispiel wird ein durch Löcher geschwächter Winkel untersucht. Dies soll zeigen, dass das Verfahren nicht nur in der Lage ist die Querschnittsmodellierung zu ermöglichen, sondern auch allgemeine Strukturen, welche ausschließlich die

für die Balkentheorie erforderlichen Längen-zu-Dicken-Verhältnisse einhalten. Für das Beispiel werden bewusst Geometrieparameter gewählt, die an die Grenzen der Homogenisierungsbeziehung gehen.

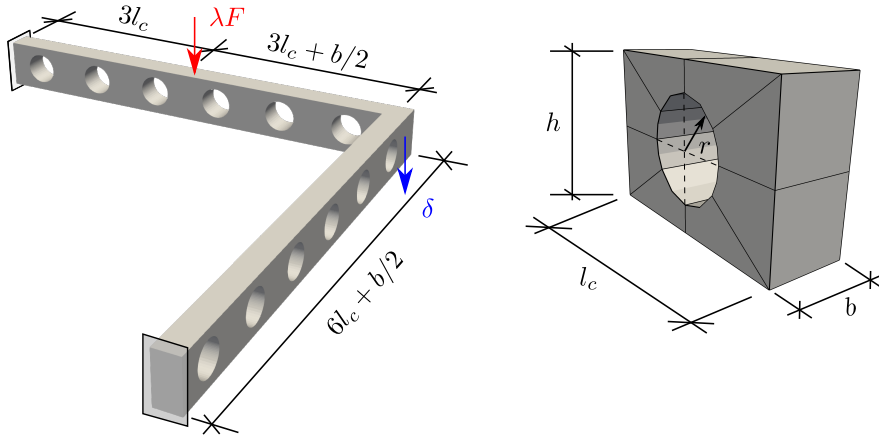


Abbildung 8.30: Systemgeometrie mit Belastung (links) – Mit Loch geschwächter Abschnitt mit Einteilung für Vernetzung.

Die Geometrie und Belastung des Systems ist in Abb. 8.30 dargestellt. Mit den gewählten Parametern  $l_c = 30$  cm,  $b = 10$  cm,  $h = 20$  cm und  $r = 6.5$  cm reduzieren die Löcher den Querschnitt um bis zu 65 %. Der Winkel wird mit einer Last von  $\lambda F = \lambda 50$  kN belastet. Als Material wird eine von Mises-Plastizität mit  $E = 21\,000$  kN cm<sup>-2</sup>,  $\nu = 0.3$  und  $Y_0 = 23.5$  kN cm<sup>-2</sup> verwendet. Zudem werden die Berechnungen sowohl auf der makroskopischen als auch auf der mesoskopischen Skala geometrisch nichtlinear durchgeführt.

Zur Beschreibung der Vernetzung ist in Abb. 8.30 (rechts) eine Unterteilung eines Abschnitts mit Loch in acht Blöcke vorgenommen worden. Jeder dieser Blöcke wird mit  $4 \times 4 \times 4$  Elementen vernetzt. Für die PBCC ist das Netz in Abb. 8.31 dargestellt. Die Besonderheit hierbei ist das Interfaceelement mit einer Dicke von  $d = 0.125 \cdot (l_c/2 - r)$ . Damit in seinem Bereich die Balkenkinematik Gültigkeit hat, wird es zwischen zwei Abschnitten mit Loch eingebracht. Dadurch wird verhindert, dass es lokale Auswirkungen auf die Spannungen hat.

Für die DBC werden zwei verschiedene RVEs gewählt. Die DBC1 werden mit nur einem Abschnitt der Länge  $l_c$  modelliert. Bei den DBC2 werden zum Vergleich mit den PBCC zwei Abschnitte modelliert. Hier hat das RVE also die Länge  $2l_c$ .

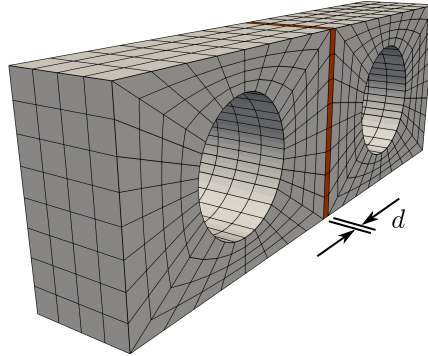


Abbildung 8.31: PBCC Netz und Interfacelement in Rot.

Das Balkensystem wird mit 6 linearen Elementen pro Richtung modelliert. Dies führt dazu, dass die Balkenelemente ca. eine Länge von  $l_c$  besitzen und die Integrationspunkte, an denen die RVEs ausgewertet werden, näherungsweise mittig über den Löchern liegen. Das System ist damit als Grenzfall für die Homogenisierung zu sehen, da somit  $l_c = L_c \leq L_{RVE}$  gilt, sofern die Länge eines Balkenelements als charakteristische Länge betrachtet wird.

Die Referenzlösung wird mit Hilfe eines Volumenmodells ermittelt. Die Einspannungen werden mit Verschiebungsrandbedingungen modelliert, während die Last durch das Interfacelement aus Abschnitt 6.3 über die gesamte Querschnittshöhe ohne Loch eingeleitet wird.

Die Ergebnisse des Lastfaktors  $\lambda$  über der Vertikalverschiebung  $\delta$  sind in Abb. 8.32 dargestellt. Zu erkennen ist, dass sowohl die gekoppelte Berechnung mit PBCC als auch diejenige mit DBC1 das Last-Verformungsverhalten des Systems sehr gut wiedergeben. Die DBC2 liefern hingegen eine zu niedrige Traglast.

In Abbildung 8.33 sind für einen Vergleich die sich einstellenden Spannungen bei einem Lastfaktor von  $\lambda = 7.4$  und einer Vertikalverschiebung von  $\delta = 2.1$  cm dargestellt. Aufgrund der Länge des RVEs bei den PBCC, vgl. Abb. 8.31, sind die RVEs für diese Randbedingungen zweireihig über dem Volumenmodell (Ref.) angeordnet. Dies resultiert aus der Wahl des makroskopischen Netzes. Zur Verdeutlichung ist die Zuordnung zwischen den RVEs und dem Volumenmodell in Rot eingezeichnet. Bei den DBC1 hingegen entspricht ein RVE genau einem Abschnitt mit Loch des Volumenmodells. Durch Aneinanderreihung dieser RVEs entsteht optisch quasi



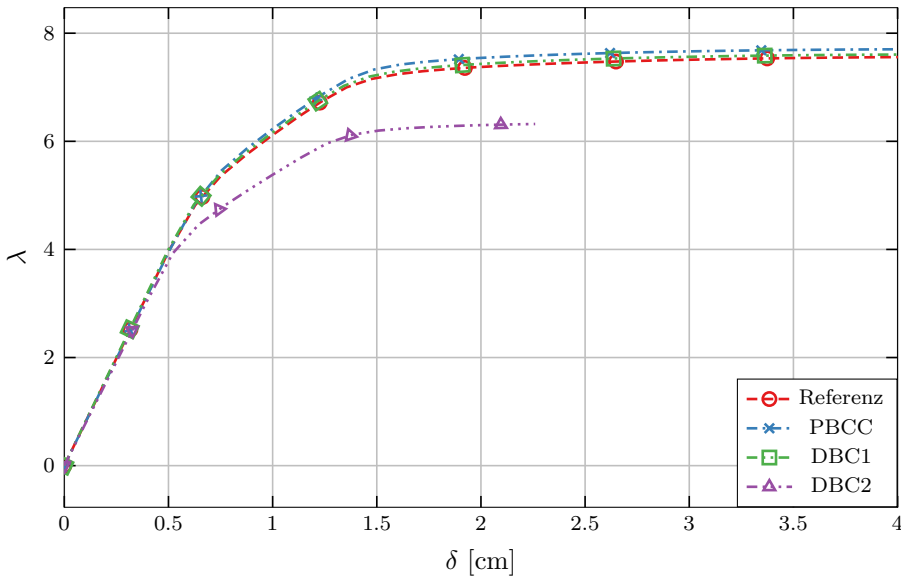


Abbildung 8.32: Lastfaktor über die Vertikalverschiebung  $\delta$  der Ecke für die geschwächte Struktur.

ein Volumenmodell, welches einreihig unter dem wirklichen Volumenmodell (Ref.) dargestellt ist.

Beim Vergleich der Normalspannungen in Abb. 8.33a wird die sehr gute Übereinstimmung des Spannungszustandes deutlich. Nur im Bereich der Einspannung weisen diese beim Volumenmodell (Ref.) Randeefekte auf. Diese werden näherungsweise durch die Wölbbehinderung bei den DBC1 mit abgebildet. Im Gegensatz dazu sind die PBCC nicht von Randeffekten infolge der Einspannung betroffen.

Zudem ist in Abb. 8.33b der Schubspannungszustand  $S_{xz}$  dargestellt. Hierbei sind keine sichtbaren Randeefekte vorhanden. Sowohl die PBCC als auch die DBC1 geben den sichtbaren Schubspannungsverlauf sehr gut wider.

Zum Vergleich des plastizierten Bereichs sind in Abb. 8.34 die plastischen Vergleichsdehnungen dargestellt. Diese konzentrieren sich dabei auf das Loch in der Nähe der Einspannung. Auch hier ist das Homogenisierungsverfahren in der Lage den Verlauf repräsentativ darzustellen.

Um einen genaueren Einblick in die Approximationsgüte der Spannungen zu erhalten, sind alle Spannungskomponenten in Abb. 8.35 entlang eines Schnitts über

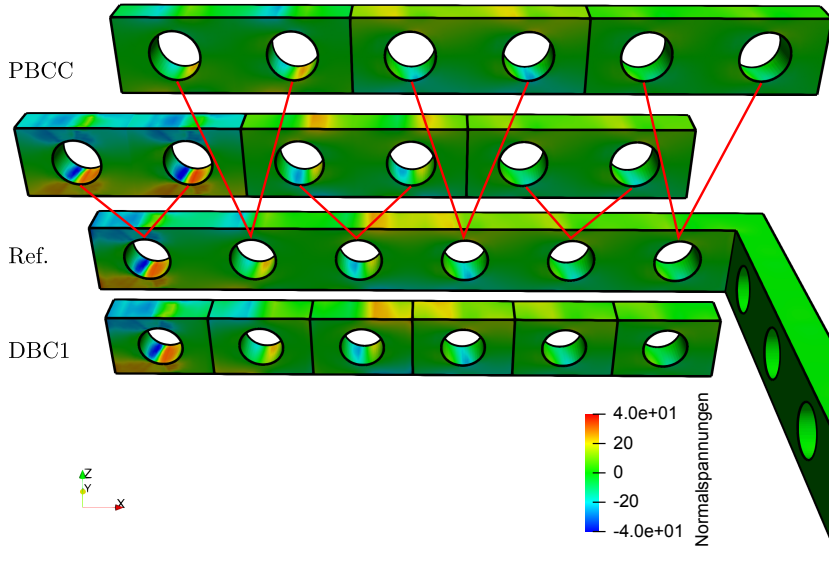
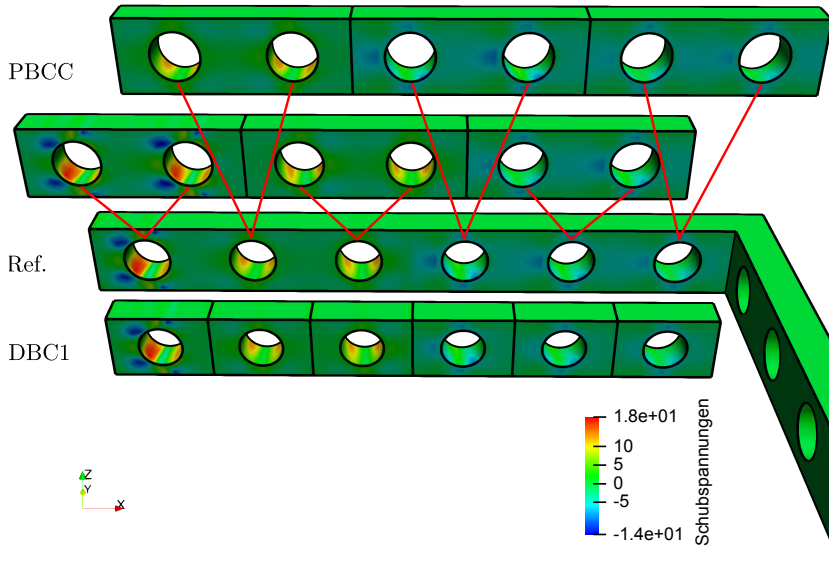
(a) Normalspannungen  $S_x$ .(b) Schubspannungen  $S_{xz}$ .

Abbildung 8.33: Spannungen in  $[\text{kN cm}^{-2}]$  für  $\delta = 2.1 \text{ cm}$  und  $\lambda = 7.4$ , Vergleich von DBC (unten) und PBCC (oben, 2-reihig, Zuordnung der RVEs in Rot) mit Volumenmodell.

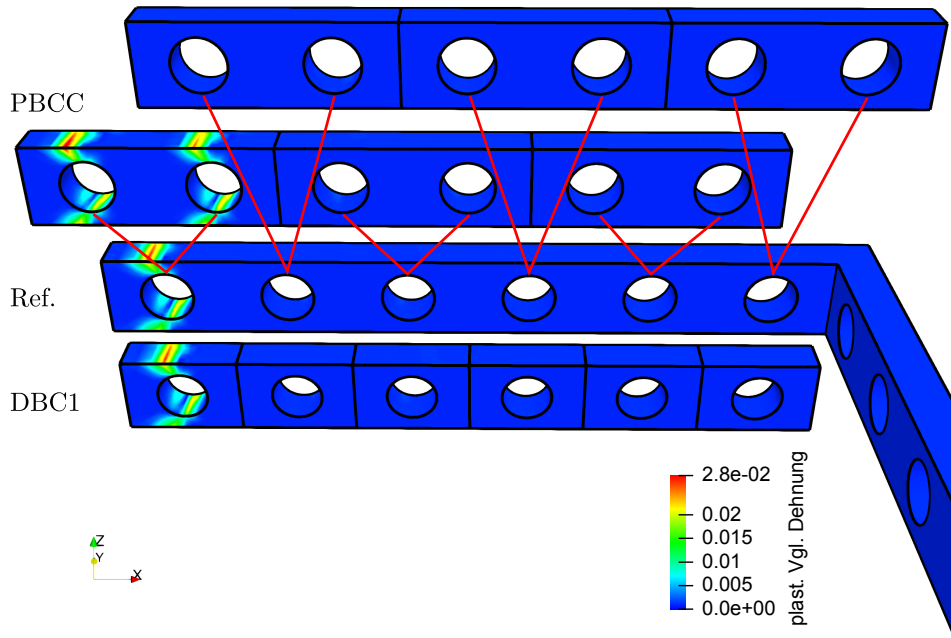


Abbildung 8.34: Plastische Vergleichsdehnung für  $\delta = 2.1$  cm und  $\lambda = 7.4$ , Vergleich von DBC (unten) und PBCC (oben, 2-reihig, Zuordnung der RVEs in Rot) mit Volumenmodell.

die Höhe  $h$  des Modells dargestellt. Dieser befindet sich an der Einspannung des belasteten Arms mittig am Rand des ersten Loches. Dabei werden die Spannungen des Volumenmodells (Ref.) sowohl von den DBC1 als auch von den PBCC sehr gut repräsentiert. Größere Abweichungen finden sich nur in den Komponenten  $S_{yz}$  und  $S_{xy}$ .

### 8.4.2 Berechnungszeiten

In diesem Abschnitt werden die Berechnungszeiten angesprochen. Ein Vergleich wird mit einem Volumenmodell gezogen, wobei es sehr schwierig ist, die Zeiten zu vergleichen.

Getestet wird auf einem Intel Core-i9 7900X. Dabei stehen 32GB Arbeitsspeicher zur Verfügung. Der Prozessor besitzt 10 Kerne und ist somit in der Lage, 20 Threads

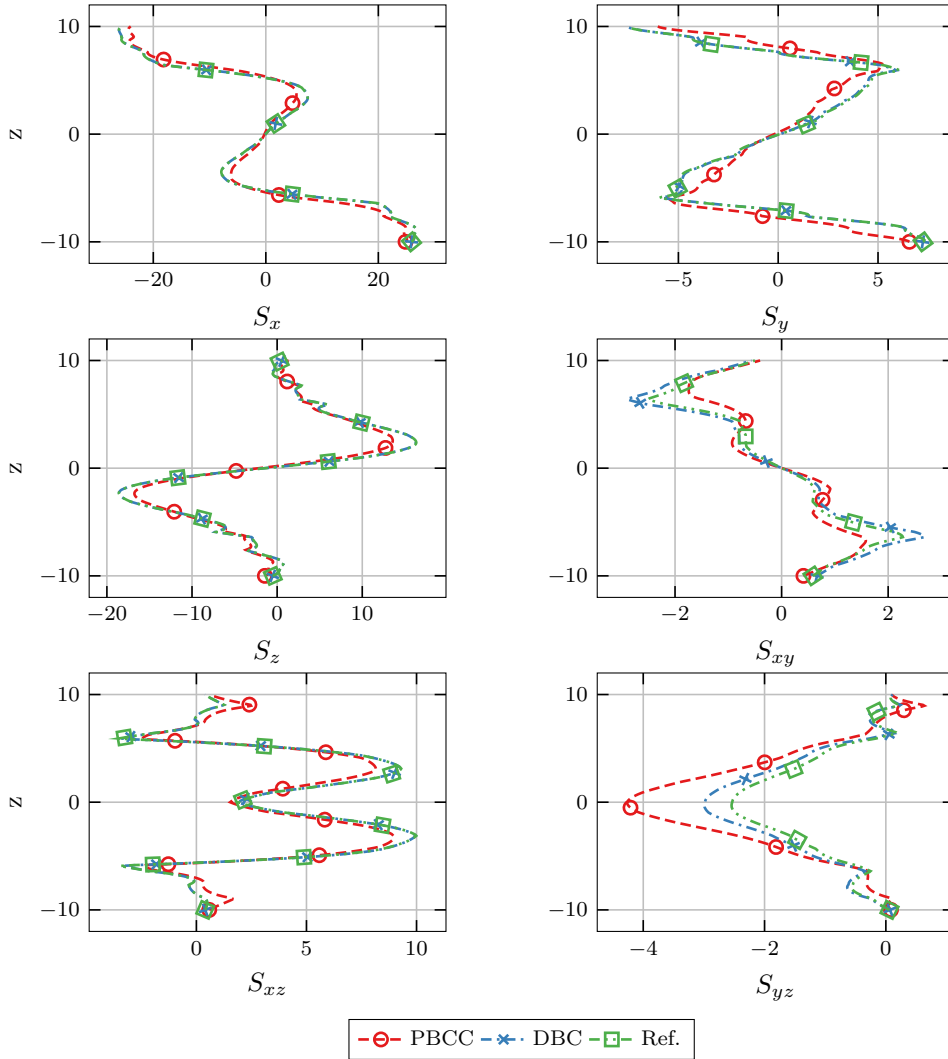


Abbildung 8.35: Spannungen über die Höhe  $z$  im Abstand von 8.5 cm von der Einspannung (Lochrand) in  $[\text{kN cm}^{-2}]$  für  $\delta = 2.1 \text{ cm}$  und  $\lambda = 7.4$ .

parallel auszuführen.

Das verwendete Programm FEAP [41] ist mit dem Intel Fortran Compiler 2018 [37] mit Standardeinstellungen für Performanceoptimierung kompiliert. Dies bedeutet, dass prozessorspezifische Optimierungen mittels der Einstellung `/QxHost` und allgemeine Optimierungen mittels der Einstellung `/O3` aktiv sind. Das Hauptprogramm ist mit Hilfe von OpenMP parallelisiert, während im Falle der gekoppelten Berechnung die zu homogenisierenden RVEs mit einer seriellen Version des Programms berechnet werden. Der Grund für die serielle Berechnung der RVEs ist, dass bereits die Elemente des makroskopischen Modells parallel abgearbeitet werden. Bei einer zusätzlichen parallelen Berechnung der RVEs würden sich die Prozesse gegenseitig blockieren und dadurch die Berechnungszeiten erhöhen. Als Gleichungslöser wird auf beiden Skalen der Intel MKL PARDISO parallele, direkte Sparse-Matrix-Löser [38] verwendet.

Als Vergleichsbeispiel dient das in Abschnitt 8.4.1 vorgestellte Modell. Dabei wird der Einfluss der Länge des Systems und damit die Anzahl  $n$  mit Loch geschwächter Abschnitte auf die Berechnungszeit untersucht. Im Gegensatz zur vorherigen Berechnung werden die linearen Balkenelemente durch quadratische ersetzt. Dadurch werden für die auskonvergierte Lösung nur noch 4 Elemente pro Arm benötigt. Diese Anzahl an Elementen ist unabhängig von der Länge. Durch dieses Vorgehen wird die eigentliche Stärke des Verfahrens aufgezeigt. Allerdings führt dies dazu, dass das makroskopische Modell nur 8 Balkenelemente besitzt. Dadurch werden nur 8 der 10 vorhandenen Kerne ausgenutzt. Bei der gekoppelten Berechnung werden die DBC1, welche die numerisch effizientere Variante darstellen, sowie die PBCC verwendet. Im Fall der DBC1 besitzt das RVE 14937 Gleichungen und bei den PBCC 31119 Gleichungen. Dies führt auf eine Gesamtanzahl an Gleichungen *neg.* von 238992 für die DBC1 und 497904 für die PBCC.

Die erste Berechnung wird parallel ausgeführt. Ermittelt wird die Dauer  $t_{\text{solu}}$  die für einen Iterationsschritt benötigt wird. Dies beinhaltet das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix, die Faktorisierung der Steifigkeitsmatrix, sowie das Lösen des Gleichungssystems. Die resultierenden Ergebnisse sind in Tabelle 8.4 angegeben. Durch die Homogenisierung und die angegebene Wahl der Vernetzung der gekoppelten Modelle ist hier keine Änderung in der Berechnungsdauer zu sehen. Beim Volumenmodell ist ein linearer Anstieg der Dauer mit der Länge der Arme und damit der Anzahl der Löcher zu erkennen. Jedes Loch muss hierbei modelliert werden, was den Anstieg der zu lösenden Gleichungen zur Folge hat. Spätestens ab 16 Löcher

$n$	DBC1			PBCC		
	$neq.$	$\delta$	$t_{solv}$	$neq.$	$\delta$	$t_{solv}$
2	238992	0.006807383	2.3	497904	0.00647472	8.2
4	238992	0.0266836	2.3	497904	0.0261661	8.2
8	238992	0.157593	2.3	497904	0.157755	8.2
16	238992	1.14690	2.3	497904	1.15686	8.2
32	238992	8.93769	2.3	497904	9.03485	8.2
64	238992	70.9848	2.3	497904	71.7981	8.2

$n$	Volumenmodell			
	$neq.$	$\delta$	$t_{solv}$	$t_{ges}$
2	63609	0.00603777	0.34	1.4
4	123981	0.0252355	0.64	2.8
8	244725	0.155447	1.22	5.6
16	486213	1.15024	2.3	11.4
32	969189	9.01331	4.6	22.8
64	1935141	71.7208	9	46.4

Tabelle 8.4: Berechnungszeiten für die Länge eines Armes von  $nl_c + b/2$  und Gesamtanzahl an Gleichungen  $neq.$ . Das Volumenmodell lastet 20 Threads aus, die gekoppelten Modelle jeweils 8 – Vertikalverschiebung  $\delta$  in cm und Zeit  $t_{solv}$  und  $t_{ges}$  in s.

pro Arm ist die gekoppelte Berechnung mit den DBC1 schneller als das Vollmodell. Für das Volumenmodell ist zudem eine zweite Zeit  $t_{ges}$  angegeben. Im Gegensatz zu  $t_{solv}$  beinhaltet diese zusätzlich die Analysephase des Gleichungssystems, welche nur beim ersten Iterationsschritt anfällt, sofern sich das Gleichungssystem nicht verändert. Beim gekoppelten Modell ist diese Zeit identisch zu  $t_{solv}$ . In diesem Fall liegen die Berechnungszeiten zwischen Volumenmodell und gekoppeltem Modell mit DBC1 bereits bei 4 Löchern pro Arm gleichauf. Die PBCC sind erst ab 16 Löchern schneller.

Um die Effekte der Parallelisierung zu entfernen, sind in Tabelle 8.5 die Zeiten im Falle einer seriellen Berechnung angegeben. Da im Falle der parallelen Berechnung nur das makroskopische Modell von FEAP parallel gelöst wird und die gekoppelten Modelle nur 4 Elemente auf makroskopischer Ebene besitzen, wird der verwendete

	DBC1	PBCC	Volumenmodell
$n$	$t_{solv}$	$t_{solv}$	$t_{solv}$
2	14.5	54.6	1.3
4	14.5	54.6	2.6
8	14.5	54.6	5.3
16	14.5	54.6	10.6
32	14.5	54.6	21.2
64	14.5	54.6	42.8

Tabelle 8.5: Berechnungszeiten für die Länge eines Armes von  $n l_c + b/2$ , serielle Berechnung – Zeit  $t_{solv}$  in s.

Prozessor nicht voll ausgelastet. Dies macht sich darin bemerkbar, dass der Rechenzeitunterschied zwischen Volumenmodell und DBC1 zwischen  $n = 16$  und  $n = 32$  in etwa gleich groß ist. Bei  $n = 64$  ist hier diese gekoppelte Berechnung nahezu dreimal so schnell wie das Volumenmodell. Im Fall PBCC besitzt das RVE doppelt so viele Gleichungen wie bei den DBC. Zudem verursacht die gewählte Vorgehensweise zum Einbau der Nebenbedingung nach Abschnitt 6.5 neun vollbesetzte Zeilen und Spalten in der Steifigkeitsmatrix, was zu erhöhtem Lösungsaufwand führt.

Beim Vergleich der Berechnungszeiten zwischen der seriellen und parallelen Berechnung ist festzustellen, dass sich die Berechnungsgeschwindigkeit für  $n \geq 16$  beim Volumenmodell um einen Faktor von ca. 4.7 steigert. Diese Steigerung erreicht also nicht den theoretisch maximalen Wert von 10, welcher der Anzahl der physischen Kerne entspricht. Im Gegensatz dazu steigert sich die Berechnungsgeschwindigkeit bei den DBC1 und PBCC um einen Faktor von ca. 6.4. Auch hier ist das theoretische Optimum hinsichtlich der verwendeten Hardware 10. Unter Beachtung der Implementierung des Algorithmus und der Wahl von 8 Balkenelementen ergibt sich jedoch ein Maximum von Faktor 8. Obwohl hier die Hardware nicht zu 100 % ausgelastet ist, wird eine höhere Geschwindigkeitssteigerung infolge Parallelisierung im Vergleich zum Volumenmodell erreicht.

## 8.5 Substrukturtechnik – Durchschlagsproblem

### Rahmenecke

Um auch auf die in Abschnitt 7.2 dargestellte Substrukturmodellierung einzugehen, wird in diesem Abschnitt das Durchschlagsproblem einer Rahmenecke betrachtet. Die Substruktur selbst wird mit dem in Abschnitt 6.2 dargestellten Volumenelement modelliert. Der Übergang von Volumenkinematik auf Balkenkinematik erfolgt mit dem Interfacelement nach Abschnitt 6.3.

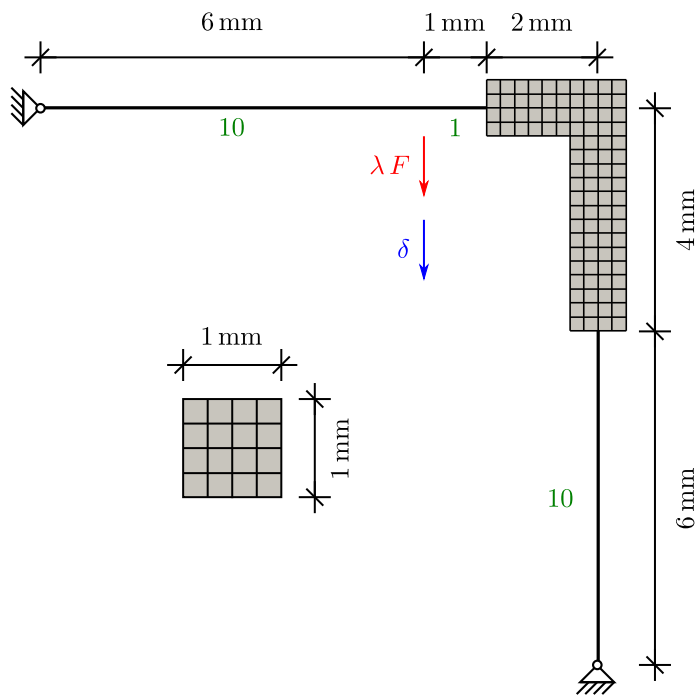


Abbildung 8.36: Querschnittsnetz und Substrukturnetz mit Systemabmessungen, Belastung  $\lambda F$  (rot) sowie zu beobachtende Verschiebung  $\delta$  (blau) und abschnittsweise Anzahl der Balkenelemente (grün).

Da in diesem Beispiel das Gesamtmodell mittels Volumenelementen abgebildet wird, stehen hier die materiellen Eigenschaften für das globale Modell nicht im Fokus. Die Schwierigkeit besteht in erster Linie darin, das Modell in einzelne Substrukturen zu zerlegen und den Übergang der Kinematik so herzustellen, dass sowohl große Deformationen als auch endliche Rotationen berücksichtigt werden können.



Um den Algorithmus so einfach wie möglich zu halten, bieten sich Interfaceelemente an, die die Querschnittsbewegung über die Balkenkinematik beschreiben. Das in der vorliegenden Arbeit verwendete Interfaceelement stellt dabei nur eine Möglichkeit unter vielen dar. Unterschiedliche Ansätze hierzu finden sich bspw. in [14, 17, 52, 77, 79, 85].

Das Substrukturnetz mit geometrischen Abmessungen des Systems ist in Abb. 8.36 dargestellt. Belastet wird das System mit  $\lambda F$ , wobei  $F = 1 \text{ N}$  beträgt. Die Materialparameter sind  $E = 720 \text{ N mm}^{-2}$  und  $\nu = 0.3$ . Um ein Kippen des Systems zu verhindern, werden die Verschiebungen auf der Symmetrieachse aus der Ebene heraus festgehalten. Hierdurch entsteht ein zweidimensionales Problem.

Zur Veranschaulichung ist in Abb. 8.36 die Substruktur in das globale Balkennetz eingefügt. Zudem ist die abschnittsweise Anzahl an Balkenelementen in grün angegeben. Weiterhin ist die Vernetzung der Substruktur erkennbar. Diese ist mit würfelförmigen Volumelementen mit einer Kantenlänge von  $0.25 \text{ mm}$  vernetzt.

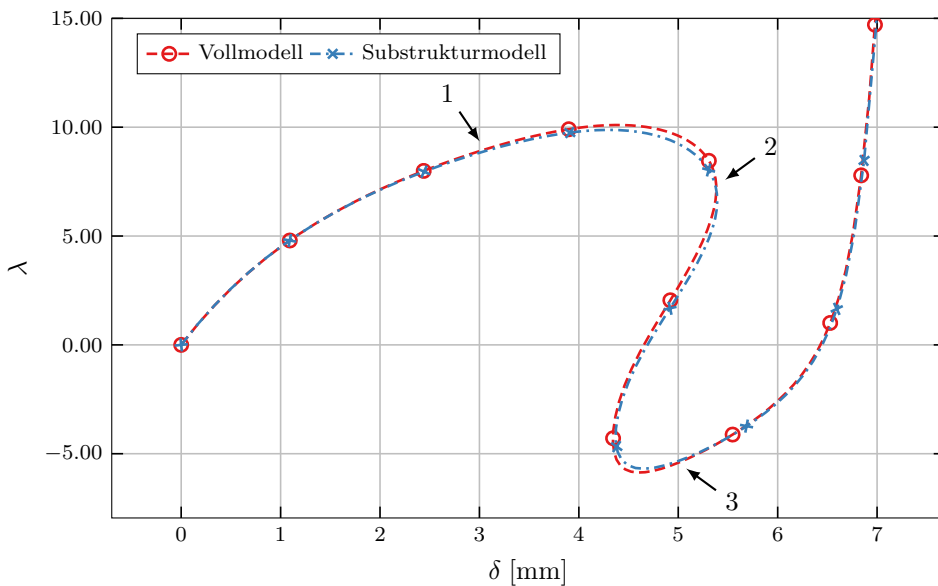
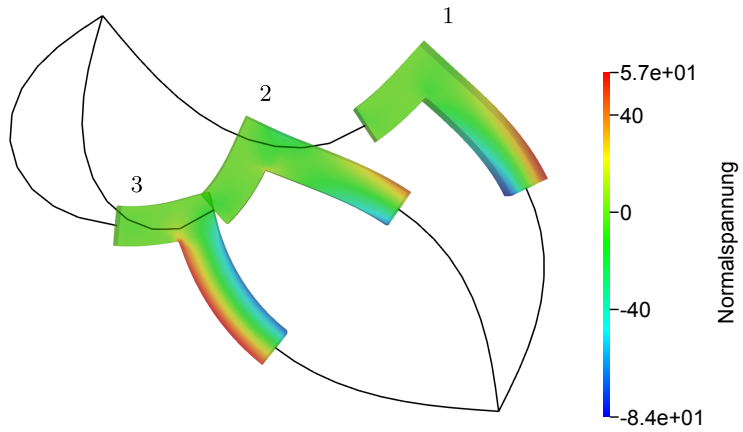
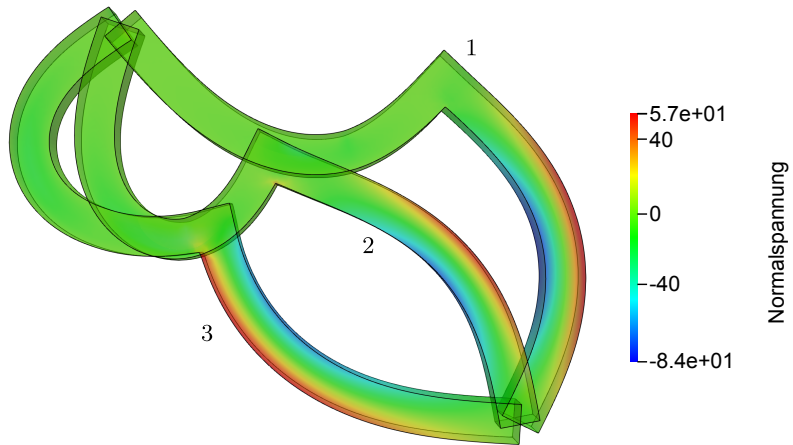


Abbildung 8.37: Last-Verschiebungskurve des Durchschlagproblems mit Markierung für deformierte Netze.

Die Berechnung wird unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität durchgeführt. Es wird der Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  über die Verschiebung  $\delta$  ermittelt. Dabei wird die Referenzlösung (Volumenmodell) mit den Volumelementen nach



(a) Substrukturmodell.



(b) Volumenmodell.

Abbildung 8.38: Deformierte Geometrie mit Normalspannungen  $S_{zz}$  in  $[\text{N mm}^{-2}]$ .

Abschnitt 6.2 ermittelt. Die gelenkige Lagerung wird mit dem Interfaceelement nach Abschnitt 6.3 modelliert. Analog hierzu erfolgt die Lasteinleitung auch mit Hilfe des Interfacelements. Die Vernetzung des Volumenmodells ist analog zu derjenigen der Substruktur. Dies bedeutet, dass hierbei auch würfelförmige Elemente mit einer Kantenlänge von 0.25 mm verwendet werden.

Die Last-Verschiebungskurve ist in Abb. 8.37 dargestellt. Dabei weisen die Ergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung auf. Weiterhin sind der Punkt 1 bei  $\delta \approx 3$  mm und  $\lambda \approx 8.9$ , der Punkt 2 bei  $\delta \approx 5.4$  mm und  $\lambda \approx 7.3$  und der Punkt 3 bei  $\delta \approx 5$  mm und  $\lambda \approx -5.4$  markiert. Zu diesen Punkten sind im Folgenden die deformierte Geometrie sowie die Normalspannungen  $S_{zz}$  der Substrukturmodellierung und des Volumenmodells dargestellt.

Die deformierten Modelle zu den erwähnten Punkten sind in Abb. 8.38 dargestellt. Auf der deformierten Geometrie sind die Konturplots der Normalspannungen  $S_{zz}$  abgebildet. Ein Vergleich in der Rahmenecke zeigt eine gute Übereinstimmung zu den unterschiedlichen Deformationszuständen. Im Gegensatz zum Homogenisierungsansatz lassen sich hier die lokalen Effekte im Bereich der einspringenden Ecke mit abbilden.



# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein gekoppeltes Mehrskalenmodell für räumliche Stabtragwerke vorgestellt. Auf der ersten Skala wurde das Modell auf die Timoshenko Balkenkinematik reduziert, während auf der zweiten Skala Volumenelemente zur Darstellung der strukturellen Beschaffenheit verwendet wurden. Beim im Fokus stehenden Homogenisierungskonzept wurde die erste Skala als makroskopische Skala und die zweite als mesoskopische Skala bezeichnet. Essentiell für dieses Verfahren ist die Übertragung der Verzerrungen von der makroskopischen Skala auf die mesoskopische Skala. Hierbei stehen im Wesentlichen die Randbedingungen im Vordergrund, welche an der mesoskopischen Skala angebracht werden. Dies wurde in der Arbeit ausführlich behandelt.

Durch die unvollständige Beschreibung des Deformationsgradienten und somit auch des Verzerrungstensors kommt es bei der Kopplung zwischen makroskopischem Balkensystem und mesoskopischem Volumenmodell zu Längenabhängigkeiten der resultierenden Schubsteifigkeiten. Dies wurde im Speziellen betrachtet und zusätzliche Nebenbedingungen entwickelt, welche dieses Problem beheben.

Anhand ausgesuchter Beispiele wurde gezeigt, dass das Homogenisierungsverfahren mit den entwickelten Rand- und Nebenbedingungen in der Lage ist, bekannte, effektive Querschnittseigenschaften zu ermitteln. Weiterhin wurde gezeigt, dass das Verfahren nichtlineare Effekte berücksichtigen kann. Hierzu gehört die materielle Nichtlinearität, welche beispielhaft anhand der Fließbedingung nach von Mises berücksichtigt wurde. Zudem kann der Einfluss von Querschnittsdeformationen in Form geometrischer Nichtlinearität berücksichtigt werden. Dies führt dazu, dass das Stabilitätsproblem Biegedrillknicken erfasst werden kann.

Die Einschränkungen des Verfahrens wurden so gering wie möglich gehalten. Dies bedeutet, dass die betrachtete Struktur im Wesentlichen ein hinreichend großes Längen-zu-Dicken-Verhältnis benötigt, so dass sie als Stabtragwerk angesehen werden kann. Dadurch ist es möglich beliebige, homogene sowie inhomogene Querschnitte zu berücksichtigen. Weiterhin wurde gezeigt, dass das Verfahren in der Lage ist, die für die Balkentheorie erforderlichen Eigenschaften aus beliebigen Strukturen zu gewinnen. Dies bedeutet, dass sich Inhomogenitäten nicht nur auf den Querschnitt beschränken, sondern auch in beliebiger Form auftreten können. Auf Grund der getroffenen Annahmen, sollte das betrachtete Tragwerk zudem gerade und unverwunden sein. Anderenfalls muss dies bei der Modellierung der RVEs berücksichtigt werden.

Als Anmerkung wurde dargelegt, dass der Homogenisierungsalgorithmus sich nicht nur für die Ermittlung repräsentativer Querschnittswerte eignet, sondern sich damit auch eine Substrukturmodellierung umsetzen lässt. Mit dem in der Arbeit entwickelten Interfacelement können hierbei finite Rotationen berücksichtigt werden. Die Kombination beider Ansätze ermöglicht es auch Bereiche abzubilden, in denen die Balkentheorie keine Gültigkeit mehr hat. Hierzu gehören beispielsweise Rahmenecken.

Die Arbeit selbst ist als Grundlagenarbeit für die Anwendung des Homogenisierungsverfahrens auf Balkensysteme anzusehen. Somit bleiben weiterhin noch einige Fragestellungen offen. Hierzu gehören unter anderem in ihrer Ausgangskonfiguration gekrümmte und verwundene Balken sowie finite Verzerrungen. Eine interessante Fragestellung hierbei ist der Einfluss auf die periodischen Randbedingungen sowie die Nebenbedingung. Weiterhin tritt das in der Arbeit im Fokus stehende Problem der Schubdeformation auch bei Schalenelementen auf. Eine Übertragung der hier entwickelten Ideen sollte durchaus möglich sein und auch dort und auch dort die richtige Approximation der Schubdeformation ermöglichen.







# Kapitel 10

## Anhang

### 10.1 Finite Rotationen – Rodrigues-Formel

Die Rodrigues Formel ermöglicht die Beschreibung finiter Rotationen mittels eines axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega}$ . Durch Einführung der Größen

$$\theta = \sqrt{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \quad (10.1)$$

und

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\theta} \quad (10.2)$$

lässt sie sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{R} = \mathbf{1} + \sin(\theta) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} + (1 - \cos(\theta)) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times}. \quad (10.3)$$

$[\mathbf{a}]_{\times}$  ist dabei die Kreuzproduktmatrix eines beliebigen Vektors  $\mathbf{a}$  mit der Form

$$[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Die Ableitung von  $\theta$  nach dem axialen Vektor ist

$$\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\theta} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (10.5)$$

und von  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega} = \frac{\theta \mathbf{1} - \omega \otimes \bar{\omega}}{\theta^2} = \frac{\mathbf{1} - \bar{\omega} \otimes \bar{\omega}}{\theta} = -\frac{1}{\theta} [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times}. \quad (10.6)$$

Weiterhin gibt es noch die folgenden Relationen für die Kreuzproduktmatrix:

$$[\mathbf{a}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{1} \quad (10.7)$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_{\times} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (10.8)$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_{\times} = [\mathbf{a}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} - [\mathbf{b}]_{\times} [\mathbf{a}]_{\times} \quad (10.9)$$

Insbesondere ist für einen normierten Vektor, hier  $\bar{\omega}$ ,

$$\bar{\omega} \otimes \bar{\omega} = [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} + \mathbf{1}. \quad (10.10)$$

Wird nun ein Vektor  $\mathbf{a}$  betrachtet, der sich aus einer Orthogonaltransformation eines beliebigen, festen Vektors  $\mathbf{b}$  mittels  $\mathbf{R}$  ergibt, lässt sich dieser schreiben als

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{b} = \mathbf{b} + \sin(\theta) \bar{\omega} \times \mathbf{b} + (1 - \cos(\theta)) \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{b}). \quad (10.11)$$

Die Variation von  $\mathbf{a}$  ergibt sich nun zu

$$\delta \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \omega} \delta \omega = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \underbrace{\mathbf{b} + \sin(\theta) \bar{\omega} \times \mathbf{b}}_I + \underbrace{(1 - \cos(\theta)) \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{b})}_{II} \right) \delta \omega. \quad (10.12)$$

Die Ableitung von  $I$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} (I) &= \frac{\partial}{\partial \omega} (-\sin(\theta) [\mathbf{b}]_{\times} \bar{\omega}) \\ &= -\cos(\theta) [\mathbf{b}]_{\times} \bar{\omega} \otimes \bar{\omega} + \frac{\sin(\theta)}{\theta} [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \\ &= -\cos(\theta) [\mathbf{b}]_{\times} ([\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} + \mathbf{1}) + \frac{\sin(\theta)}{\theta} [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \\ &= \left( \frac{\sin(\theta)}{\theta} - \cos(\theta) \right) [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} - \cos(\theta) [\mathbf{b}]_{\times}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Während die Ableitung von  $II$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} (II) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} ((\cos(\theta) - 1) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} \bar{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} ((\cos(\theta) - 1) [\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{b}]_{\times} \bar{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= -\sin(\theta) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} ([\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} + \mathbf{1}) \\
&\quad - \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta} ([\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} + [\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{b}]_{\times}) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \\
&= -\sin(\theta) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} - \frac{\theta \sin(\theta) + \cos(\theta) - 1}{\theta} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \\
&\quad - \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta} ([\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} - [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times}) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \\
&= \frac{\theta \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) - 2}{\theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{b} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \\
&\quad - \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta} [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} - \sin(\theta) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times}
\end{aligned} \tag{10.14}$$

liefert. Insgesamt lässt sich die Variation des Vektors  $\mathbf{a}$  schreiben als

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{a} &= \left[ \left( \frac{\sin(\theta)}{\theta} - \cos(\theta) \right) [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} - \cos(\theta) [\mathbf{b}]_{\times} \right. \\
&\quad + \frac{\theta \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) - 2}{\theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{b} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \\
&\quad \left. - \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta} [\mathbf{b}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} - \sin(\theta) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\mathbf{b}]_{\times} \right] \delta \boldsymbol{\omega} \\
&= \tilde{\mathbf{R}} \delta \boldsymbol{\omega}.
\end{aligned} \tag{10.15}$$

Weiterhin wird die Linearisierung von  $\delta \mathbf{a}$  benötigt. Hierfür wird  $\delta \mathbf{a}$  mit einem weiteren Vektor  $\mathbf{c}$  multipliziert

$$\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \delta \boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{c}. \tag{10.16}$$

Die Linearisierung liefert

$$\Delta \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \delta \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{c}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}. \tag{10.17}$$

Ausmultiplizieren von  $\tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{c}$  führt zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{c} &= \underbrace{d_1 [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \mathbf{f}}_{III} + \underbrace{d_2 [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \mathbf{c}}_{IV} \\
&\quad + \underbrace{d_3 [\mathbf{f}]_{\times} \bar{\omega}}_V + \underbrace{\sin(\theta) [\mathbf{b}]_{\times} [\mathbf{c}]_{\times} \bar{\omega}}_{VI} \\
&\quad + \underbrace{\cos(\theta) \mathbf{f}}_{VII}
\end{aligned} \tag{10.18}$$

mit

$$d_1 = \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\theta} \tag{10.19}$$

$$d_2 = \frac{\theta \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) - 2}{\theta} \bar{\omega} \cdot \mathbf{b} \tag{10.20}$$

$$d_3 = \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta} \tag{10.21}$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{b}]_{\times} \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \tag{10.22}$$

Die Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial d_1}{\partial \omega} = \frac{\sin(\theta) - \theta \cos(\theta) - \theta^2 \sin(\theta)}{\theta^2} \bar{\omega} \tag{10.23}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \omega} = \frac{\theta^2 \cos(\theta) - 3\theta \sin(\theta) - 4 \cos(\theta) + 4}{\theta^2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{b} \bar{\omega} \tag{10.24}$$

$$+ \frac{\theta \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) - 2}{\theta^2} (\mathbf{b} - \bar{\omega} \cdot \mathbf{b} \bar{\omega}) \tag{10.25}$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial \omega} = \frac{-\theta \sin(\theta) - \cos(\theta) + 1}{\theta^2} \bar{\omega} \tag{10.26}$$

$$\frac{\partial [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \mathbf{f}}{\partial \omega} = -\frac{1}{\theta} ([\mathbf{f} \times \bar{\omega}]_{\times} - [\bar{\omega}]_{\times} [\mathbf{f}]_{\times}) [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \tag{10.27}$$

$$= \frac{1}{\theta} ([\mathbf{f}]_{\times} - 2\mathbf{f} \cdot \bar{\omega} [\bar{\omega}]_{\times}) [\bar{\omega}]_{\times} \tag{10.28}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{R}}_I &= \frac{\partial}{\partial \omega} (III) = d_4 [\bar{\omega}]_{\times} [\bar{\omega}]_{\times} \mathbf{f} \otimes \bar{\omega} \\
&\quad + \frac{d_1}{\theta} ([\mathbf{f}]_{\times} - 2\mathbf{f} \cdot \bar{\omega} [\bar{\omega}]_{\times}) [\bar{\omega}]_{\times}
\end{aligned} \tag{10.29}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_{II} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} (IV) &= d_5 [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \mathbf{c} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} + d_6 [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \\ &\quad + \frac{d_2}{\theta} ([\mathbf{c}]_{\times} - 2\mathbf{c} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times}) [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times}\end{aligned}\quad (10.30)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_{III} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} (V) &= d_7 [\mathbf{f}]_{\times} \bar{\boldsymbol{\omega}} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} - \frac{d_3}{\theta} [\mathbf{f}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \\ &= d_7 [\mathbf{f}]_{\times} + \left(d_7 - \frac{d_3}{\theta}\right) [\mathbf{f}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times}\end{aligned}\quad (10.31)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{IV} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} (VI) = \cos(\theta) [\mathbf{b}]_{\times} [\mathbf{c}]_{\times} \bar{\boldsymbol{\omega}} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\sin(\theta)}{\theta} [\mathbf{b}]_{\times} [\mathbf{c}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} [\bar{\boldsymbol{\omega}}]_{\times} \quad (10.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} (VII) = -\sin(\theta) \mathbf{f} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (10.33)$$

mit

$$d_4 = \frac{\sin(\theta) - \theta \cos(\theta) - \theta^2 \sin(\theta)}{\theta^2} \quad (10.34)$$

$$d_5 = \frac{\theta^2 \cos(\theta) - 3\theta \sin(\theta) - 4 \cos(\theta) + 4}{\theta^2} \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{b} \quad (10.35)$$

$$d_6 = \frac{\theta \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) - 2}{\theta^2} \quad (10.36)$$

$$d_7 = \frac{-\theta \sin(\theta) - \cos(\theta) + 1}{\theta^2} \quad (10.37)$$

Durch Zusammenfassen der Terme ergibt sich mit

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}_I + \hat{\mathbf{R}}_{II} + \hat{\mathbf{R}}_{III} + \hat{\mathbf{R}}_{IV} \quad (10.38)$$

die benötigte Linearisierung

$$\Delta \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{R}} \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (10.39)$$

## 10.2 Ansatzfunktionen

An dieser Stelle werden kurz die für Linien-, Scheiben- und Volumenelemente verwendeten Ansatzfunktionen dargestellt. Die wesentliche Arbeit besteht dabei in der Konstruktion der Ansätze für die Linienelemente, da diejenigen für die Scheiben- und Volumenelemente aus ihnen gewonnen werden können.

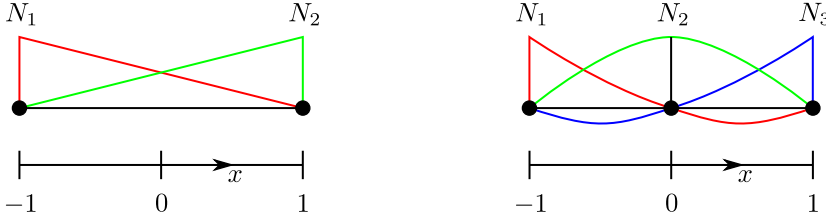


Abbildung 10.1: Beispiel lineare (links) und quadratische (rechts) 1D-Ansatzfunktionen.

Abbildung 10.1 zeigt exemplarisch die Ansatzfunktionen für lineare und quadratische Ansätze eines Linienelements. Sie sind im Intervall  $x \in [-1, 1]$  definiert und haben an ihrem zugeordneten Knoten den Wert 1. Daraus ergibt sich für die linearen Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(x) &= \frac{1}{2}(1-x) \\ \bar{N}_2(x) &= \frac{1}{2}(1+x)\end{aligned}\tag{10.40}$$

und entsprechend für die quadratischen

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(x) &= \frac{1}{2}(x-1)x \\ \bar{N}_2(x) &= (1-x)(1+x) \\ \bar{N}_3(x) &= \frac{1}{2}x(x+1).\end{aligned}\tag{10.41}$$

Die endgültigen Ansatzfunktionen werden im Parameterraum  $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$  definiert, siehe Abb. 10.2. Entsprechend gilt für eine zu approximierende Größe  $b$  mit Knotenwerten  $b$

$$b^h = \sum_{I=1}^c \bar{N}_I(\xi) b_I = \sum_{I=1}^{nel=c} N_I(\xi) b_I = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{b}\tag{10.42}$$

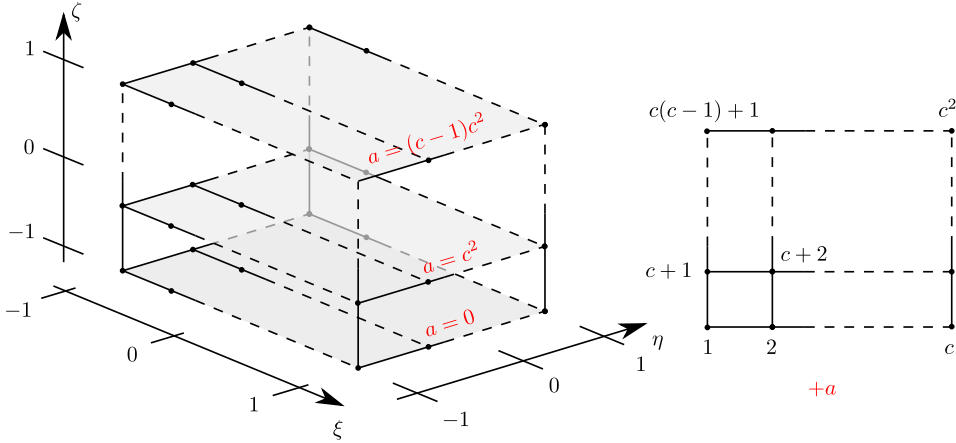


Abbildung 10.2: Lokale Knotennummerierung für 2D und 3D Elemente.

bei einem Linienelement,

$$b^h = \sum_{I=1}^c \sum_{J=1}^c \bar{N}_I(\xi) \bar{N}_J(\eta) b_{I+(J-1)c} = \sum_{I=1}^{nel=c^2} N_I(\xi, \eta) b_I = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{b} \quad (10.43)$$

bei einem Scheibenelement und

$$\begin{aligned} b^h &= \sum_{I=1}^c \sum_{J=1}^c \sum_{K=1}^c \bar{N}_I(\xi) \bar{N}_J(\eta) \bar{N}_K(\zeta) b_{I+(J-1)c+(K-1)c^2} \\ &= \sum_{I=1}^{nel=c^3} N_I(\xi, \eta, \zeta) b_I = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (10.44)$$

bei einem Volumenelement. Der Parameter  $c$  entspricht dabei der Anzahl der Knoten auf einem Linienelement und lässt sich mittels Ansatzordnung  $n$  zu  $c = n + 1$  berechnen, d.h. für die linearen Ansatzfunktionen nach Gleichung (10.40) ergibt sich  $n = 1$  und somit  $c = 2$  bzw. für die quadratischen nach Gleichung (10.41)  $n = 2$  und somit  $c = 3$ . Mit ihm lässt sich die Anzahl der Knoten pro Element  $nel$  ermitteln. Diese ist im eindimensionalen Fall  $nel = c$ , im zweidimensionalen Fall  $nel = c^2$  und im dreidimensionalen Fall  $nel = c^3$ . Werden die Summen gemäß ihrer Reihenfolge von links nach rechts ausgewertet, ergibt sich die in Abb. 10.2 dargestellte lokale Knotennummerierung. Für weitere Ansatzfunktionen wird auf [66] verwiesen.

## 10.3 Isoparametrisches Konzept und numerische Integration

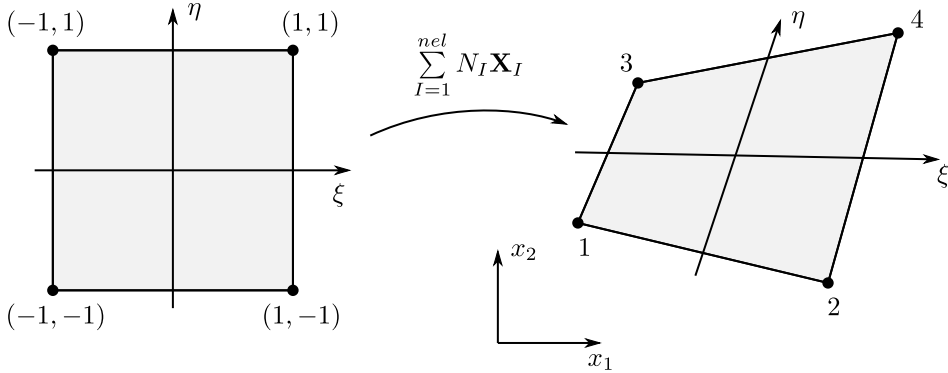


Abbildung 10.3: Isoparametrisches Konzept – Beispiel 2D Scheibenelement.

Beim isoparametrischen Konzept wird, analog zur Approximation einer beliebigen Größe in Abschnitt 10.2, die Geometrie mit den gleichen Ansatzfunktionen abgebildet. In Abbildung 10.3 wird dies beispielhaft anhand eines Scheibenelements dargestellt. Dies bedeutet

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{X}_I = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{X}. \quad (10.45)$$

Durch diese Approximation lassen sich die partiellen Ableitungen mit Hilfe der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I x_{I1}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I x_{I1}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_I x_{I2}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I x_{I2}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (10.46)$$

gemäß

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (10.47)$$



transformieren. Analog hierzu ergibt sich für den dreidimensionalen Fall

$$\mathbf{J} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I x_{I1}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I x_{I1}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_I x_{I1}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_I x_{I2}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I x_{I2}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_I x_{I2}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_I x_{I3}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I x_{I3}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_I x_{I3}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (10.48)$$

mit Transformation der partiellen Ableitungen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (10.49)$$

Weiterhin wird die Jacobi-Matrix, genauer gesagt ihre Determinante, benötigt, um Integrale in den Parameterraum zu überführen. Ein Flächenintegral im zweidimensionalen Fall transformiert sich

$$\int \dots dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (10.50)$$

und ein Volumenintegral im dreidimensionalen Fall

$$\int \dots dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \quad (10.51)$$

Es ist anzumerken, dass sich die Integrale über die Fläche Gleichung (10.50) bzw. über das Volumen Gleichung (10.51) im Allgemeinen nicht mehr analytisch auswerten lassen. Daher werden sie mittels numerischer Integration bestimmt. Hierzu wird das Integral näherungsweise durch eine Summenformel dargestellt. Für den eindimensionalen Fall ergibt sich

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i). \quad (10.52)$$

$f$  stellt dabei eine beliebige Funktion im Intervall  $\xi \in [-1, 1]$  dar. Die Approximation des Integrals über diesem Intervall wird durch Summation der mit  $w_i$  gewichteten Funktionswerte  $f(\xi_i)$  dargestellt. Entscheidend für die Qualität der Ergebnisse ist zum einen die Anzahl der Stützstellen  $n$  und zum anderen ihre Po-

sition  $\xi_i$  im Intervall. Die wohl am häufigsten verwendete Integrationsmethode ist die Gauß-Legendre-Integration. Hierbei werden  $n$  optimale Stützstellen verwendet, welche Polynome bis zum Grad  $2n - 1$  exakt integrieren.

Im Fall von Flächen- und Volumenintegrale kann die Approximation nach Gleichung (10.52), identisch zu den Ansatzfunktionen, multiplikativ erweitert werden. Dies bedeutet für Flächen

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (10.53)$$

und entsprechend für Volumen

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k). \quad (10.54)$$





# Nomenklatur

## Abkürzungen

$\{\bullet\}$	Zeitliche Ableitung von $\{\bullet\}$
$\{\bullet\}^M$	Globale bzw. makroskopische Größe
$\{\bullet\}^m$	Lokale bzw. mikro-/mesoskopische Größe
$[\{\bullet\}]_{\times}$	Kreuzproduktmatrix eines Vektors $\{\bullet\}$
DBC	Lineare Verschiebungsrandbedingungen
DBCC	DBC mit Nebenbedingung
FE	Finite-Elemente
FEAP	Finites Element Programm [41]
FEM	Finite-Elemente-Methode
PBC	Periodische Randbedingungen
PBCC	PBC mit Nebenbedingung
PBCL	PBC mit konstanten Verwölbungen im Gebiet
RVE	Repräsentatives Volumenelement

## Griechische Buchstaben

$\chi$	Materieller Punkt
$\delta \{\bullet\}$	Variation von $\{\bullet\}$
$\varepsilon$	Vektor der Balkenverzerrung und -krümmungen
$\varepsilon_C$	Linearisierte Verzerrungen für die Nebenbedingungen
$\bar{\varepsilon}$	Vektor der Balkenverzerrungen
$\varepsilon_1$ bzw. $\varepsilon_x$	Dehnung in Normalenrichtung des Balkens
$\Gamma_i$	Homogenisierungsgröße der Meso-/Mikrostruktur $i$
$\gamma_y, \gamma_z$ bzw. $\gamma_2, \gamma_3$	Gleitung des Balkens
$\bar{\kappa}$	Vektor der Balkenkrümmungen
$\kappa$	Schubkorrekturfaktor

$\kappa_x$ bzw. $\kappa_1$	Verwindung des Balkens
$\kappa_y, \kappa_z$ bzw. $\kappa_2, \kappa_3$	Krümmungen des Balkens
$\mathbf{\Lambda}$	Vektor der Lagrangeparameter
$\mathbf{\lambda}$	Vektor der translatorischen Lagrangeparameter
$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$	Translatorische Lagrangeparameter
$\boldsymbol{\mu}$	Vektor der rotatorischen Lagrangeparameter
$\mu_x, \mu_y, \mu_z$	Rotatorische Lagrangeparameter
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Omega_0$	Kontinuumskörper in der Referenzkonfiguration
$\Omega_t$	Kontinuumskörper in der Momentankonfiguration
$\partial\Omega_0$	Rand des Kontinuumskörpers in der Referenzkonfiguration
$\partial\Omega_t$	Rand des Kontinuumskörpers in der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{\omega}$	Axialer Vektor
$\phi$	Abbildung des Körpers in die Momentankonfiguration
$\phi_0$	Abbildung des Körpers in die Referenzkonfiguration
$\varphi$	Abbildung von der Referenz- in die Momentankonfiguration
$\Pi$	Potential
$\rho_0$	Rohdichte in der Referenzkonfiguration
$\rho$	Rohdichte in der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{\sigma}$	In Kapitel 2: Cauchy'scher Spannungstensor, sonst: Vektor der Balkenschnittgrößen
$\boldsymbol{\theta}$	Vektor der Kopplungsgrößen
$\boldsymbol{\theta}_{B0}$	Axialer Vektor bzgl. der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\theta}_B$	Axialer Vektor bzgl. der Momentankonfiguration

### Lateinische Buchstaben

$\mathbf{A}_e$	Relation zwischen Kopplungsgrößen und Knotenfreiheitsgraden mit Randbedingungen
$\mathbf{a}_e$	Koinzidenzmatrix
$\mathbf{A}_i$	Lokales Balkenkoordinatensystem in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{a}_i$	Lokales Balkenkoordinatensystem in der Momentankonfiguration

	guration
$\mathbf{b}_0$	Volumenlasten bezüglich der Referenzkonfiguration
$\mathcal{B}$	Kontinuuumskörper
$\partial\mathcal{B}$	Rand des Kontinuuumskörpers
$\mathbb{C}$	Vierstufiger Materialtensor, in Voigt'scher Notation zweistufig
$\bar{\mathbb{C}}$	Für die Nebenbedingungen modifizierte Materialtangente
$\mathbf{D}$	Linearisierte Balkenschnittgrößen
$d\mathbf{A}$	Differentielles Flächenelement in der Referenzkonfiguration
$da$	Differentielles Flächenelement in der Momentankonfiguration
$d\mathbf{f}$	Differentieller Kraftvektor
$dV$	Differentielles Volumenelement in der Referenzkonfiguration
$dv$	Differentielles Volumenelement in der Momentankonfiguration
$d\mathbf{X}$	Linielement in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Linielement in der Momentankonfiguration
$e_0$	Innere mechanische Energie
$\mathbf{E}$	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor
$E$	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}_B$	Vektor der nicht verschwindenden Green-Lagrange'schen Verzerrungen in der Balkentheorie
$\mathbf{e}_i$	Globales orthonormales Basissystem
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{f}^e$	Elementlastvektor
$\mathbf{G}_i$	Tangentenvektoren an die Balkenachse in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}_i$	Tangentenvektoren an die Balkenachse in der Momentankonfiguration
$G$	Schubmodul
$\mathbf{H}$	Verschiebungsgradient
$\mathbf{I}$	Impuls

---

$J$	Jakobideterminante
$\mathbf{k}^e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{L}$	Drehimpuls
$L_c$	Charakteristische Länge auf der Makroebene
$l_c$	Charakteristische Länge auf der Mikroebene
$L_{RVE}$	Länge des RVEs
$m$	Masse des Körpers
$M_x$ bzw. $M_1$	Torsionsmoment
$M_y, M_z$ bzw. $M_2, M_3$	Biegemomente
$\mathbf{N}$	Normalenvektor in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{n}$	Normalenvektor in der Momentankonfiguration
$N$	Normalkraft
$\bar{\mathbf{N}}$	Matrix der Ansatzfunktionen
$N_I$	Ansatzfunktion des Knotens $I$
$nel$	Anzahl der Knoten in einem Element
$\mathbf{P}$	1. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
$\mathcal{P}_{ext}$	Leistung externer Lasten
$\hat{\mathbf{P}}$	Vektor der homogenisierten Größen
$\mathcal{P}_{int}$	Spannungsleistung
$\mathbf{q}_0$	Wärmefluss
$Q_y, Q_z$ bzw. $Q_2, Q_3$	Querkräfte
$\mathbf{Q}$	Linearisierung von $\hat{\mathbf{P}}$
$r_0$	Interne Wärmequellen
$\mathbf{R}, \mathbf{R}_0$	Orthogonaler Tensor
$\mathbf{r}_0$	Abstand zu einem Referenzpunkt in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{r}$	Abstand zu einem Referenzpunkt in der Momentankonfiguration
$\mathbf{s}$	Deviator des Spannungstensors
$S$	Bogenlänge der Balkenreferenzachse
$\mathbf{S}$	2. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
$\mathbf{S}_B$	Vektor nicht verschwindender Komponenten des 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors in der Balkentheorie



---

$\mathbf{t}$	Cauchy'scher Spannungsvektor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{t}_0$	Cauchy'scher Spannungsvektor in der Referenzkonfiguration
$t$ bzw. $t_0$	Zeitpunkt bzw. Referenzzeitpunkt
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{u}_{B0}$	Verschiebungsvektor der Balkenreferenzachse
$\mathbf{u}_S$	Verschiebungsvektor des Querschnitts
$\mathbf{v}_0$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{V}$	Vektor der globalen Freiheitsgrade
$\mathbf{v}$	Vektor der Elementfreiheitsgrade
$V$	Volumen der Referenzkonfiguration
$\hat{\mathbf{w}}$	Fluktuationen bei periodischen Randbedingungen
$W_S$	Formänderungsenergiedichte
$\mathbf{X}_0$	Referenzpunkt der Drehimpulsbilanz
$\mathbf{X}$	Koordinaten der Referenzkonfiguration
$\mathbf{x}$	Koordinaten der Momentankonfiguration
$\mathbf{X}_{B0}$	Koordinaten der Balkenreferenzachse in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{x}_{B0}$	Koordinaten der Balkenreferenzachse in der Momentankonfiguration
$\mathbf{X}_B$	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration über die Balkenkinematik beschrieben
$\mathbf{x}_B$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration über die Balkenkinematik beschrieben
$\mathbf{X}_S$	Ortsvektor eines Querschnitts in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{x}_S$	Ortsvektor eines Querschnitts in der Momentankonfiguration
$Y_0$	Fließspannung



# Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 3., überarbeitete Auflage. Springer Vieweg, 2015
- [2] ALTUS, E.: Analysis of Bernoulli beams with 3D stochastic heterogeneity. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 18 (2003), Nr. 4, S. 301–314
- [3] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002
- [4] BUANNIC, N. ; CARTRAUD, P.: Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. II. Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 40-41, S. 7163–7180
- [5] CARRERA, E. ; GIUNTA, G. ; NALI, P. ; PETROLO, M.: Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries. In: *Computers & Structures* 88 (2010), Nr. 5-6, S. 283–293
- [6] CARTRAUD, P. ; MESSEGER, T.: Computational homogenization of periodic beam-like structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), Nr. 3, S. 686–696
- [7] COENEN, E. W. C. ; KOUZNETSOVA, V. G. ; GEERS, M. G. D.: Computational homogenization for heterogeneous thin sheets. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), Nr. 8-9, S. 1180–1205
- [8] CONG, Y. ; NEZAMABADI, S. ; ZAHROUNI, H. ; YVONNET, J.: Multiscale computational homogenization of heterogeneous shells at small strains with extensions to finite displacements and buckling. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 104 (2015), Nr. 4, S. 235–259

- [9] COWPER, G. R.: The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 33 (1966), Nr. 2, S. 335
- [10] CRISFIELD, M. A. ; JELENIĆ, G: Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455 (1999), Nr. 1983, S. 1125–1147
- [11] DONG, S. B. ; ALPDOGAN, C. ; TACIROGLU, E.: Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 13, S. 1651–1665
- [12] FEYEL, F.: *Application du calcul parallèle aux modèles à grand nombre de variables internes*. 1998. – 232 p. S. – Thèse de doctorat dirigée par Cailletaud, Georges Physique Paris, ENMP 1998
- [13] FEYEL, F. ; CHABOCHE, J.-L.: FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183 (2000), Nr. 3-4, S. 309–330
- [14] GARUSI, E. ; TRALLI, A.: A hybrid stress-assumed transition element for solid-to-beam and plate-to-beam connections. In: *Computers & Structures* 80 (2002), Nr. 2, S. 105–115
- [15] GEERS, M. G. D. ; COENEN, E. W. C. ; KOUZNETSOVA, V. G.: Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets. In: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 15 (2007), Nr. 4, S. S393–S404
- [16] GEERS, M.G.D. ; KOUZNETSOVA, V. G. ; BREKELMANS, W.A.M.: Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234 (2010), Nr. 7, S. 2175–2182
- [17] GMÜR, T. C. ; KAUTEN, T. H.: Three-dimensional solid-to-beam transition elements for structural dynamics analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), Nr. 9, S. 1429–1444
- [18] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. 12. (Springer-Lehrbuch)

- [19] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik*. 5. Springer Berlin Heidelberg, 2011
- [20] GRUTTMANN, F. ; KNUST, G. ; WAGNER, W.: Theory and numerics of layered shells with variationally embedded interlaminar stresses. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326 (2017), S. 713–738
- [21] GRUTTMANN, F. ; SAUER, R. ; WAGNER, W.: A geometrical nonlinear eccentric 3D-beam element with arbitrary cross-sections. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 160 (1998), Nr. 3-4, S. 383–400
- [22] GRUTTMANN, F. ; SAUER, R. ; WAGNER, W.: Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 12, S. 1675–1702
- [23] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections. In: *Computational Mechanics* 27 (2001), Nr. 3, S. 199–207
- [24] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: A coupled two-scale shell model with applications to layered structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 94 (2013), Nr. 13, S. 1233–1254
- [25] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: Shear correction factors for layered plates and shells. In: *Computational Mechanics* 59 (2017), Nr. 1, S. 129–146
- [26] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W. ; SAUER, R.: Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente. In: *Bauingenieur* 73 (1998), S. 138–143
- [27] HEBEL, J. ; GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: Coupled multiscale finite element analysis of shell structures. In: *PAMM* 12 (2012), Nr. 1, S. 187–188
- [28] HELLER, D.: *Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt*. Bd. 40: *A nonlinear multiscale finite element model for comb-like sandwich panels*. Darmstadt, 2016
- [29] HELLER, D. ; GRUTTMANN, F.: Nonlinear two-scale shell modeling of sandwiches with a comb-like core. In: *Composite Structures* 144 (2016), S. 147–155

- [30] HILL, R.: The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate. In: *Proceedings of the Physical Society. Section A* 65 (1952), Nr. 5, S. 349–354
- [31] HILL, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), Nr. 5, S. 357–372
- [32] HODGES, D. H.: *Nonlinear Composite Beam Theory*. Reston ,VA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006
- [33] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering*. Wiley, 2010
- [34] HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover, 2000
- [35] HUTCHINSON, J. R.: Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 68 (2001), Nr. 1, S. 87
- [36] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. ; MARKOVIĆ, D.: Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), Nr. 28-30, S. 3089–3107
- [37] INTEL CORPORATION: Intel Fortran Compiler 18.0 Developer Guide and Reference. (2017). [https://software.intel.com/sites/default/files/managed/0b/58/PDF\\_Fortran\\_Compiler\\_UG\\_18.0.pdf](https://software.intel.com/sites/default/files/managed/0b/58/PDF_Fortran_Compiler_UG_18.0.pdf). – [https://software.intel.com/sites/default/files/managed/0b/58/PDF\\_Fortran\\_Compiler\\_UG\\_18.0.pdf](https://software.intel.com/sites/default/files/managed/0b/58/PDF_Fortran_Compiler_UG_18.0.pdf), 25.04.2018
- [38] INTEL CORPORATION: Intel Math Kernel Library. (2018). – <https://software.intel.com/sites/default/files/managed/7b/d5/mkl-2018-developer-reference-fortran.pdf>, 25.04.2018
- [39] IRVING, J. H. ; KIRKWOOD, J. G.: The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes. IV. The Equations of Hydrodynamics. In: *The Journal of Chemical Physics* 18 (1950), Nr. 6, S. 817–829
- [40] JAVILI, A. ; SAEB, S. ; STEINMANN, P.: Aspects of implementing constant traction boundary conditions in computational homogenization via semi-Dirichlet boundary conditions. In: *Computational Mechanics* 59 (2017), Nr. 1, S. 21–35

- 
- [41] KARLSRUHER INSTITUT OF TECHNOLOGY, INSTITUT FÜR BAUSTATIK: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*. 2017
- [42] KENNEDY, G. J. ; MARTINS, J. R.: A homogenization-based theory for anisotropic beams with accurate through-section stress and strain prediction. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 1, S. 54–72
- [43] KLARMANN, S. ; GRUTTMANN, F.: Comparison between substructure and FE<sup>2</sup> modeling of beam-like structures. In: *PAMM* 17, Nr. 1, S. 321–322
- [44] KLARMANN, S. ; GRUTTMANN, F.: Multi-scale modeling of beam-like structures: A new boundary condition concept for the RVE. In: *PAMM* 15 (2015), Nr. 1, S. 455–456
- [45] KLARMANN, S. ; GRUTTMANN, F.: A homogenization approach for beam-like structures with arbitrarily shaped and deformable cross-sections. In: *Proceedings of the GACM Colloquium on Computational Mechanics* 7 (2017), S. 476–479
- [46] KLINKEL, S. ; GOVINDJEE, S.: Using finite strain 3D–material models in beam and shell elements. In: *Engineering Computations* 19 (2002), Nr. 3, S. 254–271
- [47] KOLLBRUNNER, C. F. ; MEISTER, M.: *Knicken, Biegedrillknicken, Kippen*. Springer, 1961
- [48] LEVINSON, M.: A new rectangular beam theory. In: *Journal of Sound and Vibration* 74 (1981), Nr. 1, S. 81–87
- [49] LUBLINER, Jacob: *Plasticity theory*. New York : Dover Publications, 2008
- [50] MANDADAPU, K. K. ; SENGUPTA, A. ; PAPADOPOULOS, P.: A homogenization method for thermomechanical continua using extensive physical quantities. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 468 (2012), Nr. 2142, S. 1696–1715
- [51] MARKOVIC, D. ; IBRAHIMBEGOVIC, A.: On micro–macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 48–51, S. 5503–5523

- [52] McCUNE, R. W. ; ARMSTRONG, C. G. ; ROBINSON, D. J.: Mixed-dimensional coupling in finite element models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 49 (2000), Nr. 6, S. 725–750
- [53] MERCER, B. S. ; MANDADAPU, K. K. ; PAPADOPOULOS, P.: Novel formulations of microscopic boundary-value problems in continuous multiscale finite element methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 286 (2015), S. 268–292
- [54] MIEHE, C. ; KOCH, A.: Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002), Nr. 4-5, S. 300–317
- [55] MISES, R. V.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928), Nr. 3, S. 161–185
- [56] REDDY, J. N.: A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25 (1990), Nr. 6, S. 677–686
- [57] RENTON, J. D.: Generalized beam theory applied to shear stiffness. In: *International Journal of Solids and Structures* 27 (1991), Nr. 15, S. 1955–1967
- [58] REUSS, A.: Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 9 (1929), Nr. 1, S. 49–58
- [59] RITTO-CORRÊA, M. ; CAMOTIM, D.: On the differentiation of the Rodrigues formula and its significance for the vector-like parameterization of Reissner-Simo beam theory. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (2002), Nr. 9, S. 1005–1032
- [60] SACHS, G.: Zur Ableitung einer Fließbedingung. (1929), S. 94–97
- [61] SAEB, S. ; STEINMANN, P. ; JAVILI, A.: Aspects of Computational Homogenization at Finite Deformations: A Unifying Review From Reuss' to Voigt's Bound. In: *Applied Mechanics Reviews* 68 (2016), Nr. 5, S. 050801



- 
- [62] SAYYAD, A. S.: Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams. In: *Applied and Computational Mechanics* 5 (2011), S. 217–230
- [63] SCHRÖDER, J.: *Homogenisierungsmethoden der nichtlinearen Kontinuumsmechanik unter Beachtung von Stabilitätsproblemen*. Stuttgart, 2000
- [64] SCHÜTT, J.: *Berichte des Instituts für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH)*. Bd. 2005,9: *Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung*. Karlsruhe : Institut für Baustatik, 2005
- [65] SIMO, J. C. ; VU-QUOC, L.: A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. In: *International Journal of Solids and Structures* 27 (1991), Nr. 3, S. 371–393
- [66] ŠOLIN, P. ; DOLEŽEL, I. ; SEGETH, I.: *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC, 2003 (Studies in advanced mathematics)
- [67] STEIN, M.: Vibration of Beams and Plate Strips With Three-Dimensional Flexibility. In: *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989), Nr. 1, S. 228
- [68] TAYLOR, G. I.: Plastic strain in metals. In: *Journal of the Institute of Metals* 62 (1938), S. 307–324
- [69] TIMOSHENKO, S. P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41 (1921), Nr. 245, S. 744–746
- [70] TIMOSHENKO, S. P.: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 43 (1922), Nr. 253, S. 125–131
- [71] TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill book Company, 1951
- [72] VLACHOUTSIS, S.: Shear correction factors for plates and shells. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), Nr. 7, S. 1537–1552

- [73] VOIGT, W.: Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. In: *Annalen der Physik* 274 (1889), Nr. 12, S. 573–587
- [74] WACKERFUSS, J. ; GRUTTMANN, F.: A mixed hybrid finite beam element with an interface to arbitrary three-dimensional material models. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), Nr. 27, S. 2053–2066
- [75] WACKERFUSS, J. ; GRUTTMANN, F.: A nonlinear Hu–Washizu variational formulation and related finite-element implementation for spatial beams with arbitrary moderate thick cross-sections. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), Nr. 17-20, S. 1671–1690
- [76] WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F.: Finite element analysis of Saint–Venant torsion problem with exact integration of the elastic–plastic constitutive equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), Nr. 29-30, S. 3831–3848
- [77] WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F.: Modeling of Shell-Beam Transitions in the Presence of Finite Rotations. In: *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 9 (2002), S. 405–418
- [78] WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F.: A consistently linearized multiscale model for shell structures. In: PIETRASZKIEWICZ, Wojciech (Hrsg.): *Shell structures*. CRC Press, 2013
- [79] WANG, F. Y. ; XU, Y. L. ; QU, W. L.: Mixed-dimensional finite element coupling for structural multi-scale simulation. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 92 (2014), S. 12–25
- [80] WRIGGERS, P.: *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, 2008
- [81] XU, L. ; CHENG, G. ; YI, S.: A new method of shear stiffness prediction of periodic Timoshenko beams. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23 (2016), Nr. 6, S. 670–680
- [82] YI, S. ; XU, L. ; CHENG, G. ; CAI, Y.: FEM formulation of homogenization method for effective properties of periodic heterogeneous beam and size effect of basic cell in thickness direction. In: *Computers & Structures* 156 (2015), S. 1–11

- 
- [83] YU, W. ; HODGES, D. H.: Generalized Timoshenko Theory of the Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis. In: *Journal of the American Helicopter Society* 50 (2005), Nr. 3, S. 289
- [84] YU, W. ; HODGES, D. H. ; VOLOVOI, V. ; CESNIK, C. E. S.: On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), Nr. 19, S. 5101–5121
- [85] YUE, J. ; FAFITIS, A. ; QIAN, J. ; LEI, T.: Application of 1D/3D finite elements coupling for structural nonlinear analysis. In: *Journal of Central South University of Technology* 18 (2011), Nr. 3, S. 889–897
- [86] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; FOX, D. F.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013
- [87] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013



# Akademischer Werdegang

## Persönliche Angaben

Name: Simon Cornelius Klarmann  
Geburtsdatum: 15.07.1987  
Geburtsort: Neuenbürg, Baden-Württemberg

## Werdegang

1998-2007 Abitur, Gymnasium Neuenbürg  
2008-2013 Studium Bauingenieurwesen, Universität Karlsruhe /  
KIT  
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau  
23.04.2013 Diplom Bauingenieurwesen, KIT  
Titel: Ein robustes Zeitintegrationsverfahren für nicht-  
lineare dynamische Probleme - Entwicklung, Analyse  
und Optimierung  
01.07.2013 – Wissenschaftlicher Mitarbeiter,  
30.06.2018 FG Festkörpermechanik – TU Darmstadt

